ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

«Владивостокский морской рыбопромышленный колледж»
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования

«Дальневосточный государственный технический
рыбохозяйственный университет»

(«ВМРК» ФГБОУ ВО «ДАЛЬРЫБВТУЗ»)

КУРС ЛЕКЦИЙ

ПД.03 МАТЕМАТИКА: алгебра и начала математического анализа; геометрия

для специальности
35.02.11
Промышленное рыболовство

Владивосток
2021

ОДОБРЕН
Цикловой комиссией
естественнонаучных и
математических дисциплин
Председатель:
_________ Сухомлинова А.А.
(подпись)
Протокол №1 от 01.09. 2021 г.

Авторы:
преподаватели «ВМРК» ФГБОУ ВО «Дальрыбвтуз»
Волошина С.В. ____________ *подпись*
Осипова О.А. ____________ *подпись*
Романова Г.Н. ____________ *подпись*

Курс лекций составлен в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ПД.03 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия, утвержденной зам. начальника колледжа по УВР 01.09.21 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ЛЕКЦИЙ 6
Тема 1.1. Числовые множества. Дроби, действия над ними. 9
Тема 1.2. Пропорция и проценты. Формулы сокращенного умножения и их применение. 12
Тема 1.3. Степени с натуральными, целыми, рациональными показателями и их свойства. Арифметический корень натуральной степени. Свойства корней. 15
Тема 2.1. Степенная функция, ее свойства и график. 18
Тема 2.2. Равносильность уравнений и неравенств. 23
Тема 2.3. Иррациональные уравнения и неравенства. 26
Тема 3.1. Показательная функция, ее свойства и график. 29
Тема 3.2. Показательные уравнения и неравенства. 30
Тема 4.1. Логарифмы и их свойства. 32
Тема 4.2. Десятичные и натуральные логарифмы. Число е. Формула перехода к новому основанию. 34
Тема 4.3. Преобразование логарифмических выражений. 35
Тема 4.4. Логарифмическая функция, ее свойства и график. 36
Тема 4.5. Логарифмические уравнения. 39
Тема 4.6. Логарифмические неравенства. 41
Тема 5.1. Радианная мера угла. Определение синуса, косинуса и тангенса угла. 43
Тема 5.2. Поворот точки вокруг начала координат 45
Тема 5.3. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла. 47
Тема 5.4. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла. 48
Тема 5.5. Тригонометрические тождества. 50
Тема 5.6. Синус, косинус и тангенс углов α и -α. 50
Тема 5.7. Формулы сложения. 51
Тема 5.8. Формулы двойного угла. 53
Тема 5.9. Формулы половинного угла. 54
Тема 5.10. Формулы приведения. 56
Тема 5.11. Сумма и разность синусов, косинусов. 57
Тема 6.1. Уравнения $\mathbf{cos}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $\mathbf{sin}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$. 59
Тема 6.2. Уравнения $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ 62
Тема 6.3. Решение тригонометрических уравнений разных видов. 64
Тема 6.4. Решение простейших тригонометрических неравенств 67
Тема 6.5. Область определения, множество значений, четность и нечетность тригонометрических функций. 69
Тема 6.6. Тригонометрические функции $\boldsymbol{y} = \mathbf{sin}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{cos}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x}$, их свойства и графики. 72

Тема 7.1. Правило произведения. 74
Тема 7.2. Перестановки, сочетания. 75
Тема 7.3. Размещения....................76
Тема 8.1. События. Комбинации событий. Противоположное событие. 77
Тема 8.2. Вероятность события. Сложение вероятностей. 79
Тема 8.3. Независимые события. Умножение вероятностей....................80
Тема 8.4. Статистическая вероятность. 81
Тема 9.1. Производная. 82
Тема 9.2. Производные основных элементарных функций....................84
Тема 9.3. Производные сложных функций. 86
Тема 9.4. Правила дифференцирования. 87
Тема 9.5. Производная: её геометрический и физический смысл. 88
Тема 9.6. Нахождение точек экстремума функции, промежутков возрастания и убывания с помощью производной. 91
Тема 9.7. Применение производной к построению графиков функций. 94
Тема 9.8. Первообразная. Правила нахождения первообразных. 96
Тема 9.9. Площадь криволинейной трапеции и интеграл. 100
Тема 9.10. Вычисление интегралов. 100
Тема 10.1. Аксиомы стереометрии и следствия из них. 101
Тема 10.2. Параллельность прямых. 104
Тема 10.3. Параллельность прямой и плоскости в пространстве. 107
Тема 10.4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. 109
Тема 10.5. Угол между двумя прямыми. 111
Тема 10.6. Параллельность плоскостей. 113
Тема 10.7. Перпендикулярность прямой и плоскости. 116
Тема 10.8. Перпендикуляр и наклонная. 122
Тема 10.9. Угол между прямой и плоскостью. 125
Тема 10.10. Двугранный угол. 130
Тема 10.11. Перпендикулярность плоскостей. 132
Тема 10.12. Многогранные углы. 133
Тема 11.1. Понятие многогранника. Призма. 135
Тема 11.2. Наклонная призма. 137
Тема 11.3. Нахождение элементов призмы....................139
Тема 11.4. Нахождение полной и боковой поверхности призмы. 142
Тема 11.5. Пирамида. 144

Тема 11.6. Правильная пирамида. Тетраэдр. 146
Тема 11.7. Усеченная пирамида. 147
Тема 11.8. Нахождение элементов пирамиды. 148
Тема 11.9. Нахождение полной и боковой поверхности пирамиды. 150
Тема 12.1. Цилиндр. 153
Тема 12.2. Конус. 155
Тема 12.3. Усеченный конус. 157
Тема 12.4. Нахождение высоты, радиуса, образующей цилиндра и конуса. 160
Тема 12.5 Осевые сечения, параллельные основанию сечения в цилиндре и конусе. 161
Тема 12.6. Сфера и шар. 163
Тема 12.7. Взаимное расположение сферы и плоскости. 166
Тема 13.1. Понятие объема. 167
Тема 13.2. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда. 168
Тема 13.3. Объем цилиндра. 170
Тема 13.4. Объем конуса 170
Тема 13.5. Объем усеченного конуса. 172
Тема 13.6. Вычисление объемов куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра и конуса. 173
Тема 13.7. Объем прямой и наклонной призмы. 174
Тема 13.8. Объем пирамиды. 177
Тема 13.9. Объем усеченной пирамиды. 179
Тема 13.10. Вычисление объемов прямой, наклонной призмы и пирамиды, конуса. 179
Тема 13.11. Объем шара, площадь сферы. 180
Тема 13.12. Объем шарового слоя. 181
Тема 13.13. Объем шарового сектора. 182
Тема 14.1. Векторы в пространстве. 184
Тема 14.2. Действия над векторами. 185
Тема 14.3. Координаты точки в пространстве. 188
Тема 14.4. Координат вектора в пространстве. 189
Тема 14.5. Длина вектора. Расстояние между двумя точками. 191
Тема 14.6. Скалярное произведение векторов. 192
Тема 14.7. Угол между векторами и прямыми. 194
ЛИТЕРАТУРА 197

ПЕРЕЧЕНЬ ЛЕКЦИЙ

№ п/п	Наименование занятий	Кол-во часов
1	Тема 1.1. Числовые множества. Дроби, действия над ними.	2
2	Тема 1.2. Пропорция и проценты. Формулы сокращенного умножения и их применение.	2
3	Тема 1.3. Степени с натуральными, целыми, рациональными показателями и их свойства. Арифметический корень натуральной степени. Свойства корней.	2
4	Тема 2.1. Степенная функция, ее свойства и график.	2
5	Тема 2.2. Равносильность уравнений и неравенств.	2
6	Тема 2.3. Иррациональные уравнения и неравенства.	2
7	Тема 3.1. Показательная функция, ее свойства и график.	2
8	Тема 3.2. Показательные уравнения и неравенства.	2
9	Тема 4.1. Логарифмы и их свойства.	2
10	Тема 4.2. Десятичные и натуральные логарифмы. Число е. Формула перехода к новому основанию.	2
11	Тема 4.3. Преобразование логарифмических выражений.	2
12	Тема 4.4. Логарифмическая функция, ее свойства и график.	2
13	Тема 4.5. Логарифмические уравнения.	2
14	Тема 4.6. Логарифмические неравенства.	2
15	Тема 5.1. Радианная мера угла. Определение синуса, косинуса и тангенса угла.	2
16	Тема 5.2. Поворот точки вокруг начала координат.	2
17	Тема 5.3. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла.	2
18	Тема 5.4. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла.	2
19	Тема 5.5. Тригонометрические тождества.	2
20	Тема 5.6. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.	2
21	Тема 5.7. Формулы сложения.	2
22	Тема 5.8. Формулы двойного угла.	2
23	Тема 5.9. Формулы половинного угла.	2
24	Тема 5.10. Формулы приведения.	2
25	Тема 5.11. Сумма и разность синусов, косинусов.	2
26	Тема 6.1. Уравнения $\cos x=a$, $\sin x=a$.	2
27	Тема 6.2. Уравнения $tg x=a$ и $ctg x=a$.	2
28	Тема 6.3. Решение тригонометрических уравнений разных видов.	2
29	Тема 6.4. Решение простейших тригонометрических неравенств.	2
30	Тема 6.5. Область определения, множество значений, четность и нечетность тригонометрических функций.	2
31	Тема 6.6. Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tg x$, $y=ctg x$, их свойства и графики.	2
32	Тема 7.1. Правило произведения.	2
33	Тема 7.2.Перестановки, сочетания.	2
34	Тема 7.3. Размещения.	2
35	Тема 8.1. События. Комбинации событий. Противоположное событие.	2
36	Тема 8.2. Вероятность события. Сложение вероятностей.	2
37	Тема 8.3. Независимые события. Умножение вероятностей.	2
38	Тема 8.4. Статистическая вероятность.	2
39	Тема 9.1. Производная.	2

40	Тема 9.2. Производные основных элементарных функций.	2
41	Тема 9.3. Производные сложных функций.	2
42	Тема 9.4. Правила дифференцирования.	2
43	Тема 9.5. Производная: её геометрический и физический смысл.	2
44	Тема 9.6. Нахождение точек экстремума функции, промежутков возрастания и убывания с помощью производной.	2
45	Тема 9.7. Применение производной к построению графиков функций.	2
46	Тема 9.8. Первообразная. Правила нахождения первообразных.	2
47	Тема 9.9. Площадь криволинейной трапеции и интеграл.	2
48	Тема 9.10. Вычисление интегралов.	2
49	Тема 10.1. Аксиомы стереометрии и следствия из них.	2
50	Тема 10.2. Параллельность прямых.	2
51	Тема 10.3. Параллельность прямой и плоскости в пространстве.	2
52	Тема 10.4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.	2
53	Тема 10.5. Угол между двумя прямыми.	2
54	Тема 10.6. Параллельность плоскостей.	2
55	Тема 10.7. Перпендикулярность прямой и плоскости.	2
56	Тема 10.8. Перпендикуляр и наклонная.	2
57	Тема 10.9. Угол между прямой и плоскостью.	2
58	Тема 10.10. Двугранный угол.	2
59	Тема 10.11. Перпендикулярность плоскостей.	2
60	Тема 10.12. Многогранные углы.	2
61	Тема 11.1. Понятие многогранника. Призма.	2
62	Тема 11.2. Наклонная призма.	2
63	Тема 11.3. Нахождение элементов призмы.	2
64	Тема 11.4. Нахождение полной и боковой призмы.	2
65	Тема 11.5. Пирамида.	2
66	Тема 11.6. Правильная пирамида. Тетраэдр.	2
67	Тема 11.7. Усеченная пирамида.	2
68	Тема 11.8. Нахождение элементов пирамиды.	2
69	Тема 11.9. Нахождение полной и боковой поверхности пирамиды.	2
70	Тема 12.1. Цилиндр.	2
71	Тема 12.2.Конус.	2
72	Тема 12.3. Усеченный конус	2
73	Тема 12.4. Нахождение высоты, радиуса, образующей цилиндра и конуса.	2
74	Тема 12.5 Осевые сечения, параллельные основанию сечения в цилиндре и конусе.	2
75	Тема 12.6. Сфера и шар.	2
76	Тема 12.7. Взаимное расположение сферы и плоскости.	2
77	Тема 13.1. Понятие объема.	2
78	Тема 13.2. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда.	2
79	Тема 13.3. Объем цилиндра.	2
80	Тема 13.4. Объем конуса.	2
81	Тема 13.5. Объем усеченного конуса.	2
82	Тема 13.6. Вычисление объемов куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра и конуса.	2
83	Тема 13.7. Объем прямой и наклонной призмы.	2
84	Тема 13.8. Объем пирамиды.	2
85	Тема 13.9. Объем усеченной пирамиды.	2
86	Тема 13.10. Вычисление объемов прямой, наклонной призмы и пирамиды,	2

	конуса.	
87	Тема 13.11. Объем шара, площадь сферы.	2
88	Тема 13.12. Объем шарового слоя.	2
89	Тема 13.13. Объем шарового сектора.	2
90	Тема 14.1. Векторы в пространстве.	2
91	Тема 14.2. Действия над векторами.	2
92	Тема 14.3. Координаты точки в пространстве.	2
93	Тема 14.4. Координат вектора в пространстве.	2
94	Тема 14.5. Длина вектора. Расстояние между двумя точками.	2
95	Тема 14.6. Скалярное произведение векторов.	2
96	Тема 14.7. Угол между векторами и прямыми.	2
	Итого:	192

Тема 1.1. Числовые множества. Дроби, действия над ними.

Цель: Повторение теории числовых множеств, алгоритма работы с обыкновенными и десятичными дробями.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком.

Если элемент a принадлежит множеству A, то записывают $a \in A$ ($\in$ — принадлежит), если нет, то $a \notin A$.

Пример №1: $A = \{1,2,3,5,7\}$. Число $3 \in A$, $100 \notin A$.

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$($\subset$— содержится). Элементы множества B, не входящие в A, образуют множество, которое называют дополнением A и обозначается $\overline{A}$

Пример №2: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,1,4,2,5,8,10\}$. $A \subset B$. $\overline{A} = \{5,8,10\}$.

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым множеством и записывается $\emptyset$.

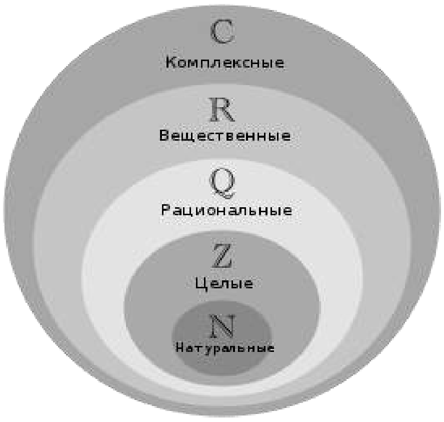
Если множество состоит из конечного числа элементов, то его называют конечным, если нет, то бесконечным.

Основные числовые множества:

Обозначение	Название	Как задается множество:
N	Натуральных чисел.	$N = \{1,2,3,\dots,n\}$
Z	Целых чисел.	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n\}$
Q	Рациональных чисел (обыкновенные, десятичные и бесконечные десятичные периодические дроби).	$Q = \frac{p}{q}$, где p — целое число, q — натуральное. Например, $\frac{3}{19}$, $0{,}25$, $1{,}6(3)$.
I	Иррациональных чисел (бесконечные десятичные непериодические дроби). Q и I не пересекаются– то есть ни одно иррациональное число невозможно	Например, π, e,$0{,}13856\dots$

	представить в виде $\frac{p}{q}$рациональной дроби.	
R	Действительных (вещественных) чисел.	$R = Q + I$
C	Комплексных чисел. (выражение вида $z = a + b \cdot i$, где a , b — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица.	Например,$z = -2 + 6 \cdot i$

С помощью кругов Эйлера все множества можно изобразить в виде:



Пример №3: Записать в виде десятичной дроби:

а) $\frac{8}{11} \approx 0,(72)$ б)$-\frac{3}{4} = -0{,}75$.

Пример №4: Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби: а) $\frac{8}{13} + \frac{2}{3} = \frac{24+26}{39} = \frac{50}{39} \approx 1{,}28205 \ldots$ б) $\frac{7}{9} \cdot 1{,}7 = \frac{7}{9} \cdot \frac{17}{10} = \frac{119}{90} \approx 1{,}3(2)$ в) $\frac{1}{6} + 0{,}33 = \frac{1}{6} + \frac{33}{100} = \frac{50+99}{300} = \frac{149}{300} \approx 0{,}49(6)$

Пример №5: Выяснить каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое выражение:

а) $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3}) = 2\sqrt{27} - 3\sqrt{27 \cdot 3} - 4 + 6\sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3} - 4 + 6\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 4 + 6\sqrt{3} =$

$= 6\sqrt{3} - -27 - 4 + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 31$

является иррациональным числом.

б) $\left(5\sqrt{3}+\sqrt{27}\right):\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=5+\frac{\sqrt{9\cdot 3}}{\sqrt{3}}=5+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=5+3=8\Rightarrow$ является рациональным числом.

в) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\left(2\sqrt{5}+1\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1^2-\left(\left(2\sqrt{5}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\right.$ $\left.\cdot 1+1^2\right)=5-2\sqrt{5}+1-20-4\sqrt{5}-1=5-6\sqrt{5}\Rightarrow$ является иррациональным числом.

Пример №6: Вычислить: а) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20\cdot 5}=\sqrt{4\cdot 5\cdot 5}=2\cdot 5=10$ б) $\sqrt{12}:\sqrt{27}=\sqrt{\frac{12}{27}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Задание №1: Записать в виде десятичной дроби:

а) $\frac{2}{3}\approx 0,(6)$ б) $\frac{3}{5}=0,6$ в) $-8\frac{2}{7}\approx -8,(285714)$ г) $\frac{13}{99}\approx 0,(13)$

Задание №2: Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби: а) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}=\frac{18+11}{99}=\frac{29}{99}\approx 0,(29)$б) $\frac{3}{14}\cdot 1,05=\frac{3}{14}\cdot\frac{105}{100}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{20}=\frac{9}{40}=0,225$ в) $\frac{1}{3}+1,25=\frac{1}{3}+\frac{125}{100}=\frac{1}{3}+\frac{5}{4}=\frac{4+15}{12}=\frac{19}{12}\approx 1,58(3)$.

Задание №3: Выяснить каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое выражение:

а) $\left(\sqrt{8}-3\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=3\sqrt{8}+2\sqrt{8\cdot 2}-9-6\sqrt{2}=3\sqrt{4\cdot 2}+$

$+2\sqrt{4\cdot 2\cdot 2}-9-6\sqrt{2}=3\cdot 2\sqrt{2}+2\cdot 2\cdot 2-9-6\sqrt{2}=6\sqrt{2}+8-9-$

$-6\sqrt{2}=-1\Rightarrow$является рациональным числом.

б) $\left(\sqrt{50}+4\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=\sqrt{50\cdot 2}+4\sqrt{2\cdot 2}=\sqrt{25\cdot 2\cdot 2}+4\cdot 2=5\cdot 2+8=$ $=10+8=18\Rightarrow$ является рациональным числом.

в) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+$ $+1^2=3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1=8\Rightarrow$ является рациональным числом.

Задание №4: Вычислить:

а) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{28}=\sqrt{63\cdot 28}=\sqrt{9\cdot 7\cdot 7\cdot 4}=3\cdot 7\cdot 2=42$

б) $\sqrt{50}:\sqrt{8}=\sqrt{\frac{50}{8}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=2,5$.

Задание №5: Вычислить: а) $(20{,}88 : 18 + 45 : 0{,}36) : (19{,}59 + 11{,}95) =$

$= (1{,}16 + 125) : 31{,}54 = 126{,}16 : 31{,}54 = 4$

б) $\frac{7}{36} \cdot 9 + 8 \cdot \frac{11}{32} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{18} = \frac{7}{4} + \frac{11}{4} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4{,}75.$

Тема 1.2. Пропорция и проценты. Формулы сокращенного умножения и их применение.

Цель: Повторение алгоритма составления пропорции и вычисление процентов по условию задачи, принцип раскрытия и сворачивания выражений с помощью формул сокращенного умножения.

Равенство двух отношений называют пропорцией. Например, $\frac{12}{16} = \frac{18}{24}$.

Пример №1: нужно пить 1 таблетку активированного угля на 10 килограмм веса. Сколько таблеток нужно выпить, если человек весит 70 кг?

Составим пропорцию:

1 таблетка — 10 кг

xтаблеток — 70 кг

$$\frac{1}{x} = \frac{10}{70}$$

$$10x = 70$$

$x = \frac{70}{10} = 7$ таблеток нужно выпить, если человек весит 70 кг.

Пример №2: Первое число составляет 80% от второго. А сколько процентов второе число составляет от первого?

Пусть 2 число — x, тогда 1 число — $\frac{80}{100}$ от 1 числа или $0{,}8x$. Составим выражение для нахождения ответа на вопрос задачи: «Сколько процентов второе число составляет от первого?».

$\frac{x}{0{,}8x} \cdot 100\% = \frac{100}{0{,}8} = 125\%$ процентов второе число составляет от первого.

Пример №3: Сколько литров воды нужно разбавить с 300 г соли для получения раствора с концентрацией 15%?

Количество воды, которое нужно добавить для получения нужной концентрации обозначим за x , проценты переведем в дробь $\frac{15}{100} = 0{,}15$. Составим выражение для нахождения ответа на вопрос задачи:

$$0{,}15x = 300$$

$x = \frac{300}{0{,}15} = 2000$ г $= 2$ л воды нужно разбавить с 300 г соли для получения раствора с концентрацией 15%. Напомним, что 1000 г $= 1$ л.

Пример №4: В раствор соленой воды массой 600 г с концентрацией 15% добавили раствор соленой воды массой 240 г с концентрацией 50%. Сколько процентов соли в полученной смеси?

В 600 г соленой воды с концентрацией 15% содержится 15% от 600 г соли. Это $0{,}15 \cdot 600 = 90$ г соли. В 240 г соленой воды с концентрацией 50% содержится 50% от 240 г соли. Это $0{,}5 \cdot 240 = 120$ г соли. Масса полученной смеси равна $600 + 240 = 840$ г. Соли в этой массе $90 + 120 = 210$ г. Составим выражение и найдем процент соли в полученной смеси:

$\frac{210}{840} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$соли в полученной смеси.

Формулы сокращенного умножения:

1. Квадрат суммы двух выражений равен: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Квадрат разности двух выражений равен: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
4. Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Задание №1: За пять часов Вася пишет две статьи. Сколько статей он напишет за 20 часов?

Составим пропорцию:

2 статьи — 5 часов

x статей — 20 часов

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{20}$$

$$5x = 40$$

$x = \frac{40}{5} = 8$ статей Вася напишет за 20 часов.

Задание №2:

а) $(x - 7)^{\ 2} = x^2 - 14x + 49$;

б) $(a^2 - 6)^2 = a^2 - 12a + 36$;

в) $(-3c + a)^2 = (a - 3c)^2 = a^2 - 6a + 9$;

г) $(-5a - 8b)^2 = (-1)^2 \cdot (5a + 8b)^2 = 25a^2 + 80a + 64$;

д) $4a^2 + 4ab + b^2 = (2a + b)^2$;

е) $\frac{9}{16}a^2 - 2ab + \frac{16}{9}b^2 = \left(\frac{3}{4}a - \frac{4}{3}b\right)^2$;

ж) $a^2b^2 + 2ab + 1 = (ab + 1)^2$.

Задание №3:

а) $4x^2 - 1 = (2x - 1) \cdot (2x + 1)$;

б) $m^2 - a^2 = (m - a) \cdot (m + a)$;

в) $-n^2 + b^2 = b^2 - n^2 = (b - n) \cdot (b + n)$;

г) $81x^2 - y^2 = (9x - y) \cdot (9x + y)$;

д) $49x^2 - 121a^2 = (7x - 11a^2) \cdot (7x + 11a^2)$;

е) $100a^2 - 25b^2 = (10a - 25b) \cdot (10a + 5b)$;

ж) $c^2 - a^2b^2 = (c - ab) \cdot (c + ab)$;

Задание №4:

а) $(x\ +\ 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$;

б) $(a\ +\ 2x)^3 = a^3 + 6a^2x + 12ax^2 + 8x^3$;

в) $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;

г) $8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$;

д) $a^3 + 0{,}001 = (a + 0{,}1)(a^2 - 0{,}1a + 0{,}01)$;

е) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) = a^3 - 64$

ж) $(m^2 + 4)(m^4 - 4m^2 + 16) = m^6 + 64$.

Задание №5: Упростить выражение с помощью формул сокращенного умножения: а) $(5a+1)^2$ б) $9a^2-6ab+b^2$ в) $1-9a^2$ г) $(x\ +\ 4)^3$

д) $(10+4c)^2$ е) $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$ ж) a^2-16 з)$125-a^3$.

Задание №6: Найдите неизвестный член пропорции:

а) $4\colon x=5{,}6\colon 0{,}07$ б) $0{,}9=1{,}6\colon 3$.

Задание №7: а) За 3 ч Вася прополол 60% участка. За какое время он сможет дополоть участок, если будет работать с той же производительностью?

б) За 6 ч фермер собрал 40% имеющихся вишен. За какое время он сможет собрать остальную вишню, если будет работать с той же производительностью?

Задание №8: а) В раствор серной кислоты массой 300 г с концентрацией 20% налили 200 г чистой воды. Сколько процентов составляет концентрация кислоты в последнем растворе?

б) В раствор сахарной воды массой 200 г с концентрацией 30% налили 100 г чистой воды. Сколько процентов составляет концентрация сахара в последнем растворе

Тема 1.3. Степени с натуральными, целыми, рациональными показателями и их свойства. Арифметический корень натуральной степени. Свойства корней.

Цель: Познакомиться с понятиями степеней с натуральным, целым, рациональным показателями, арифметическим корнем n-й степени и их свойствами. Научиться вычислять арифметические корни и использовать свойства степеней с рациональными показателями для упрощения выражений.

Степень с натуральным показателем.

Степенью числа a с натуральным показателем n ($n>1$) называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\text{раз}},\ a^1=a.$

Свойства степеней с натуральным показателем:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $a^m : a^n = \begin{cases} a^{m-n}, m > n \\ 1, m = n, (a \neq 0) \\ \frac{1}{a^{n-m}}, n > m, (a \neq 0) \end{cases}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $, b \neq 0$

6. $(-a)^n = \begin{cases} a^n, n = 2k \\ -a^n, n = 2k+1 \end{cases}.$

Пример №1: Вычислить:

$\frac{15^3 \cdot 21^2}{35^2 \cdot 3^4} = \frac{(3\cdot5)^3 \cdot (3\cdot7)^2}{(5\cdot7)^2 \cdot 3^4} = \frac{3^3 \cdot 5^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^4} = \frac{3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 5 = 15.$

Пример №2: Расположить в порядке возрастания следующие числа:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3; \left(-\frac{2}{5}\right)^2; (0{,}3)^2; (-1{,}2)^2$$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{3^3}{4^3} = -\frac{27}{64} = -0{,}421875,$ $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16,$

$(0{,}3)^2 = 0{,}09,$ $(-1{,}2)^2 = 1{,}44.$

Отсюда: $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 < (0{,}3)^2 < \left(-\frac{2}{5}\right)^2 < (-1{,}2)^2$.

Степень с целым показателем.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$. Выражение 0^0не имеет смысла.

Если $a \neq 0$, и n– натуральное, то$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Выражение 0^{-n} не имеет смысла.

Свойство 2 степени с натуральным показателем можно записать, используя понятие степени с нулевым и целым отрицательным показателем, в виде:

$\frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}, a \neq 0.$

Остальные свойства имеют ту же запись.

Пример №3: Вычислить: $\frac{18^{-3}\cdot 3^7}{2^{-5}} = \frac{2^5\cdot 3^7}{18^3} = \frac{2^5\cdot 3^7}{(2\cdot 3^2)^3} = \frac{2^5\cdot 3^7}{2^3\cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3 = 12.$

Пример №4: Упростить: $\frac{(ab)^4}{(a^{-2}\cdot b^3)^{-3}} = \frac{a^4\cdot b^4}{a^6\cdot b^{-9}} = \frac{b^{13}}{a^2}.$

Арифметический корень -й степени.

Арифметическим корнем -й степени из неотрицательного числа называется неотрицательное число b, n-степень которого равна a.

Подкоренное выражение корня четной степени, больше либо равно 0.

Свойства арифметического корня:

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot k]{a^k}, (a \geq 0)$

2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, (a \geq 0, b \geq 0)$

3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, (a \geq 0, b > 0)$

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, (a \geq 0, m -$ натуральноечисло$)$

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}, (a \geq 0, m, n -$ натуральныечисла$, m \geq 2, n \geq 2).$

Степень с рациональным показателем.

Свойства степеней с рациональным показателем имеют ту же запись, что и свойства степеней с натуральным показателем.

Если $a > 0$ и $\frac{m}{n}$ - рациональное число, представленное дробью, где m – целое, и $n \geq 2$– натуральное число, то: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Пример №5: а) $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$, при $a > 0$; б) $b^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b^3}}$, при $b > 0$.

Таблица степеней натуральных чисел от 1 до 10:

	1^n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n	10^n
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000
5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	100000
6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441	1000000
7	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969	10000000
8	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721	100000000
9	1	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489	1000000000
10	1	1024	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401	10000000000

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №1 Степени с рациональными показателями. Арифметический корень натуральной степени № 1-10.

Тема 2.1. Степенная функция, ее свойства и график.

Цель: Познакомиться с понятием степенной функции. Научится определять вид схематического графика, свойства и строить его по точкам в зависимости от степени.

Степенная функция задается формулой вида $y = x^a$.

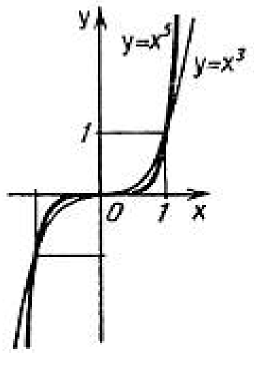
Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной сверху, если множество её значений ограниченно сверху. Иначе говоря, функция $f(x)$ ограничена сверху, если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$выполняется неравенство f(x) $\leq$ M.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной снизу, если множество её значений ограниченно снизу, то есть если существует такая постоянная M, что для каждого x ∈ X выполняется неравенство f(x) $\geq$ M.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной, если множество её значений ограниченно как сверху, так и снизу.

Степенная функция с нечетным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ при нечетном положительном показателе степени, то есть, при $a = 1,3,5, \dots$ При $a = 1$ имеем линейную функцию $y = x$.



Свойства степенной функции с нечетным положительным показателем:

Область определения: $x \in (-\infty; \infty)$.

Область значений: $y \in (-\infty; \infty)$.

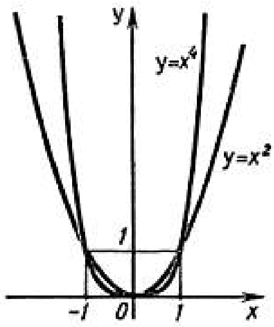
Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

Функция возрастает при $x \in (-\infty; \infty)$.

Функция не ограничена

Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Степенная функция с четным положительным показателем.



Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с четным положительным показателем степени, то есть, при $a = 2,4,6, \ldots$ При $a = 2$ имеем квадратичную функцию, графиком которой является квадратичная парабола.

Свойства степенной функции с четным положительным показателем:

Область определения: $x \in (-\infty; \infty)$.

Область значений: $y \in [0; \infty)$.

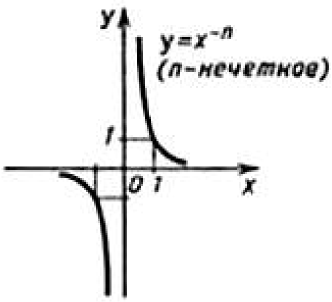
Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.

Функция возрастает при $x \in [0; \infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$.

Функция ограничена снизу.

Функция принимает наименьшее значение при $y = 0$ и $x = 0$.

Степенная функция с нечетным отрицательным показателем.



Посмотрите на графики степенной функции $y = x^a$ при нечетных отрицательных значениях показателя степени, то есть, при $a = -1, -3, -5, \ldots$ При $a = 1$ имеем обратную пропорциональность, графиком которой является гипербола.

Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем:

Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

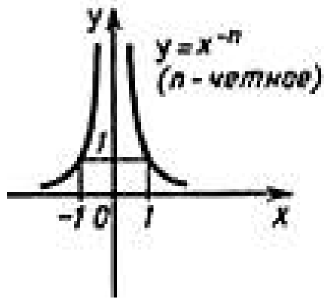
Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

Функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Функция не ограничена

Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения

Степенная функция с четным отрицательным показателем.



Перейдем к степенной функции $y = x^a$ при $a = -2, -4, -6, \ldots$

Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем:

Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Область значений: $y \in (0; \infty)$.

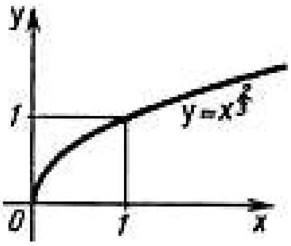
Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.

Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0)$, убывает при $x \in (0; \infty)$.

Функция ограничена снизу.

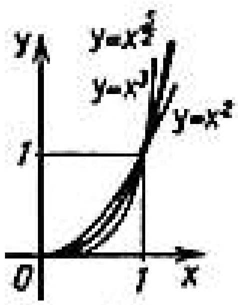
Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Степенная функция с рациональным или иррациональным показателем.



Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с рациональным или иррациональным показателем a, причем $0 < a < 1$. Например, $a = \frac{2}{7}, \frac{1}{2}, \frac{8}{9}, \ldots$

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с нецелым рациональным или иррациональным показателем a, причем $a > 1$. Например, $a = 1\frac{2}{7}, \frac{3}{2}, 20\frac{8}{9}, \ldots$



Свойства степенной функции с рациональным или иррациональным показателем:

Область определения: $x \in [0; \infty)$.

Область значений: $y \in [0; \infty)$.

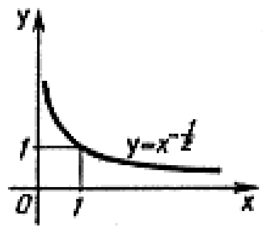
Функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция возрастает при $x \in [0; \infty)$.

Функция ограничена снизу.

Функция принимает наименьшее значение при $y = 0$ и $x = 0$.

Степенная функция с рациональным или иррациональным отрицательным показателем.



Переходим к степенной функции $y = x^a$, когда $-1 < a < 0$ и $a < -1$. Например, $a = -2\frac{3}{7}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{9}, \ldots$ Их графики и свойства аналогичны.

Свойства степенной функции с нецелым отрицательным показателем:

Область определения: $x \in (0; \infty)$.

Область значений: $y \in (0; \infty)$.

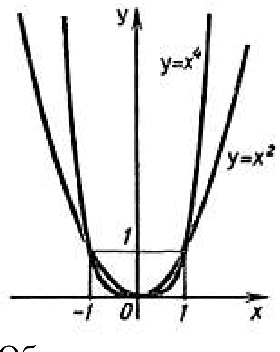
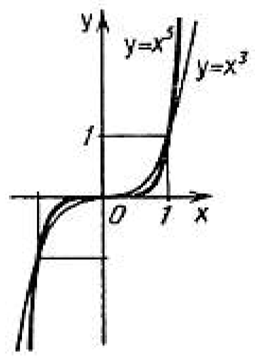
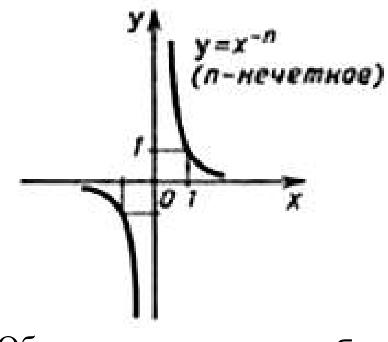
Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

Функция убывает при $x \in (0; \infty)$.

Функция ограничена снизу.

При $a = 0$ и $x \neq 0$ имеем функцию $y = x^0 = 1$ – это прямая из которой исключена точка $(0; 1)$ (выражению 0^0 условились не придавать никакого значения).

Пример №1: Изобразить схематически график функции и указать ее область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограничена сверху (снизу):

а) $y = x^6$	б) $y = x^7$	в) $y = x^{-3}$
 Область определения: $x \in (-\infty; \infty)$. Область значений: $y \in [0; \infty)$. Функция ограничена снизу.	 Область определения: $x \in (-\infty; \infty)$. Область значений: $y \in (-\infty; \infty)$. Функция не ограничена.	 Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Функция не ограничена.

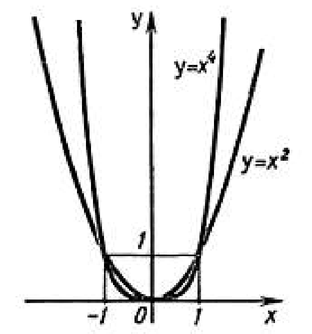
Пример №2: Выяснить, является ли функция $y = x^a$ возрастающей (убывающей) при $x > 0$, если: а) $a = 7, \uparrow$ б) $a = 16, \uparrow$ в) $a = -3, \downarrow$

г) $a = -7, \downarrow$ д) $a = -4, \downarrow$ е) $a = -10, \downarrow$

Пример №3: Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

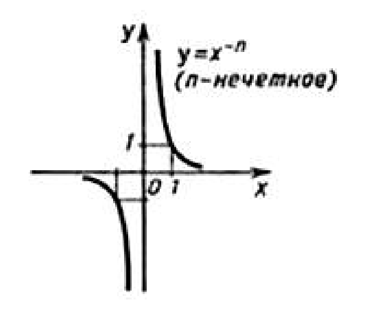
а) $y = x^4\ , x \in [-1; 2]$

Функция ограничена снизу.
Функция принимает наименьшее значение при $y = 0$ и $x = 0$.
Точка $(0; 0)$ принадлежит промежутку $[-1; 2]$, значит наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = 0$.
Чтобы найти наибольшее значение функции подставим значения на концах отрезка:
$y(-1) = (-1)^4 = 1^4 = 1$
$y(2) = 2^4 = 16$
$y_{\text{наиб}} = 16$



б) $y = x^{-1}\ , x \in [-3; -1]$.

Функция не ограничена
Чтобы найти наименьшее и наибольшее значение функции подставим значения на концах отрезка:
$y(-3) = (-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = -\frac{1}{3}$
$y(-1) = (-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^1} = -\frac{1}{1} = -1$
$y_{\text{наим}} = -1$
$y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{3}$

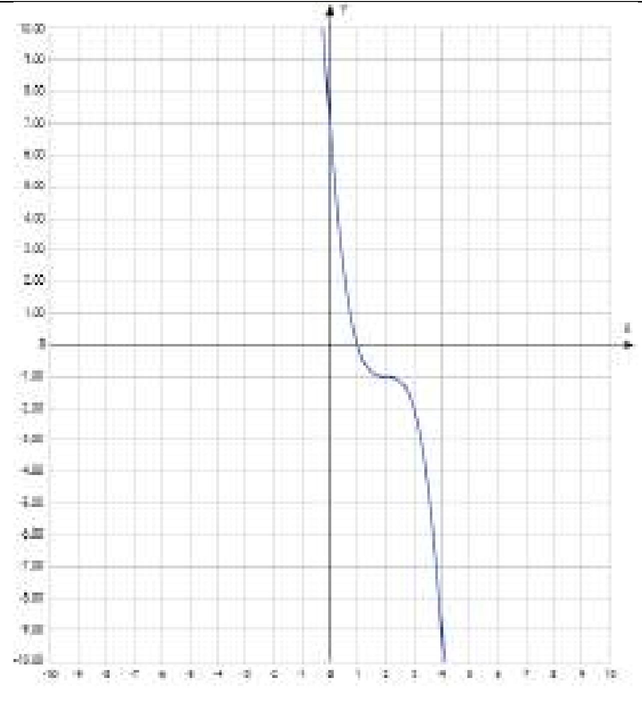


Пример №4: Построить график функции, указать ее область определения и множество значений. Выяснить является ли функция возрастающей (убывающей), является ли она ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение: $y = -(x-2)^3 - 1$.

Построим график функции $y = -x^3$ по точкам:
$x = -2, y = -(-2)^3 = -(-8) = 8$
$x = -1, y = -(-1)^3 = -(-1) = 1$
$x = 0, y = -0^3 = 0$
$x = 1, y = -1^3 = -1$
$x = 2, y = -2^3 = -8$
Составим таблицу по данным точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	8	1	0	-1	-8

Построим график функции, переместив каждую из точек на 2 единицы вправо и на одну единицу вниз.
Область определения: $x \in (-\infty; \infty)$.
Область значений: $y \in (-\infty; \infty)$.
Функция убывает при $x \in (-\infty; \infty)$.
Функция не ограничена
Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.



Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №2 Построение графиков степенных функций. Решение равносильных и иррациональных уравнений и неравенств № 1-5.

Тема 2.2. Равносильность уравнений и неравенств.

Цель: Познакомиться с понятиями равносильности уравнений и неравенств. Научиться применять алгоритмы решения равносильных уравнений и неравенств.

Равносильные уравнения - это уравнения, имеющие одно и то же множество корней (в том числе уравнения, не имеющие корней).

Равносильные неравенства - это неравенства, имеющие одно и то же множество решений (в том числе неравенства, не имеющие решений).

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения.

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Пример №1: Решить уравнение:

а) $x^2 + \frac{1}{x^2-4} = 4 + \frac{1}{x^2-4}$

$x^2 + \frac{1}{x^2-4} - 4 - \frac{1}{x^2-4} = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2 \notin$ ОДЗ

ОДЗ:

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

Ответ: решений нет.

б) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2} \ |\cdot (x-3)(x+2)$

$5x - 15 = 2(x-3)$

$5x - 15 = 2x - 6$

ОДЗ:

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$x + 2 \neq 0$

$5x - 2x = -6 + 15$

$3x = 9$

$x = 3 \notin$ ОДЗ

Ответ: решений нет.

$x \neq -2$

в) $\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{4x}{x^2-1} \quad |\cdot (x+1)(x-1)$

$x(x-1) + 2x(x+1) = 4x$

$x^2 - x + 2x^2 + 2x - 4x = 0$

$3x^2 - 3x = 0$

$3x(x-1) = 0$

$3x = 0$ или $x - 1 = 0$

$x = 0$ или $x = 1 \notin$ ОДЗ

Ответ: $x = 0$.

ОДЗ:

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

г) $(x-3)(x-5) = 3(x-5)|: (x-5)$

$x - 3 = 3$

$x = 6$

Ответ: $x = 5; 6$

Так как мы разделили на выражение, содержащее x, решим данное уравнение и корень запишем в ответ.

$x - 5 = 0$

$x = 5$

Пример №2: Равносильны ли следующие уравнения:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$a = 1, b = -3, c = 2$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 =$

$9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$a = 1, b = 3, c = 2$

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 =$

$= 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Корни уравнений различны, следовательно, не равносильны.

б) $x^2 - 1 = 0$ и $2^{x-1} = 0$

$x^2 - 1 = 0 \qquad 2^{x-1} = 0$

$x^2 = 1$ $\qquad$ $2^{x-1} \neq 0$

$x = \pm 1$ $\qquad$ Число в любой степени не может равняться 0. Решений нет.

Корни уравнений различны, следовательно, не равносильны.

Пример №3: Равносильны ли неравенства:

$(x-1)(x+2) < 0$ и $x^2 + x < 2$

$x^2 + 2x - x - 2 < 0$

$x^2 + x - 2 < 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$a = 1, b = 1, c = -2$

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x^2 + x < 2$

$x^2 + x - 2 < 0$

$x \in (-2; 1)$

Решения неравенств одинаковы, следовательно, равносильны.

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.

Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак функции:

$-3 \in (-\infty; -2): y(-3) = (-3)^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4$

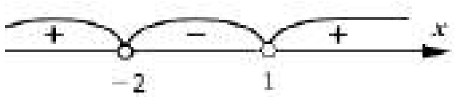
$4 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".

$0 \in (-2; 1): y(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2$

$-2 < 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "-".

$2 \in (1; \infty): y(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4$

$4 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".



Знак неравенства < 0, значит берем отрицательные значения: $x \in (-2; 1)$.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №2 Построение графиков степенных функций. Решение равносильных и иррациональных уравнений и неравенств № 6-10.

Тема 2.3. Иррациональные уравнения и неравенства.

Цель: Познакомиться с понятиями иррациональных уравнений и неравенств. Научиться применять алгоритмы решения иррациональных уравнений и неравенств.

Иррациональными называются неравенства и уравнения, в которых переменные или рациональные функции находятся под знаком корня.

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение - следствие данного.

Подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю.

Пример №1: Решить уравнение:

а) $\sqrt{x+1} = 3$ |^2

$x+1=9$

$x=8$

Ответ: $x=8$.

ОДЗ:

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x \in [-1; \infty)$

б) $\sqrt{x-2} = 5$ |^2

$x-2=25$

$x=27$

Ответ: $x=27$.

ОДЗ:

$x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

$x \in [2; \infty)$

в) $\sqrt{4+x} = \sqrt{2x-1}$ |^2

$4+x=2x-1$

$x-2x=-1-4$

$-x=-5$

$x=5$

Ответ: $x=5$.

ОДЗ:

$4+x \geq 0$ и $2x-1 \geq 0$

$x \geq -4$ $\quad$ $2x \geq 1$

$x \geq 0{,}5$

Общее решение двух неравенств:

$x \in [0{,}5; \infty)$

г) $x+1 = \sqrt{1-x}$ |^2

$(x+1)^2 = 1-x$

$x^2+x+1=1-x$

$x^2+x+1-1+x=0$

$x^2+2x=0$

ОДЗ:

$1-x \geq 0$

$-x \geq -1$

$x \leq 1$

$x \in (-\infty; 1]$

$x(x+1)=0$

$x=0$ или $x+1=0$

$x=-1$

Ответ: $x=-1; 0$.

д) $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$ |^2

$x+3=5-x$

$x+x=5-3$

$2x=2$

$x=1$

Ответ: $x=1$.

ОДЗ:

$x+3 \geq 0$ и $5-x \geq 0$

$x \geq -3$ $\quad -x \geq -5$

$x \leq 5$

Общее решение двух неравенств:

$x \in [-3; 5]$

Пример №2: Решить неравенства:

а) $\sqrt{x} > 2$ |^2

$x > 4$

Общее решение неравенства и ОДЗ:

$x \in (4; \infty)$

Ответ: $x \in (4; \infty)$

ОДЗ:

$x \geq 0$

б) $\sqrt[3]{x} \geq 1$ |^3

$x \geq 1$

Ответ: $x \in [1; \infty)$

ОДЗ:

Для корней нечетной степени не требуется.

в) $\sqrt{x-2} > 3$ |^2

$x-2 > 9$

$x > 11$

Общее решение неравенства и ОДЗ:

$x \in (11; \infty)$

Ответ: $x \in (11; \infty)$

ОДЗ:

$x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

Пример №3: Решить систему неравенств: $\begin{cases} 9-x^2 \leq 0 \\ x+5 < 0 \end{cases}$

$$9-x^2 \leq 0$$

$$9 - x^2 = 0$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.

Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак функции:

$-4 \in (-\infty; -3)\colon y(-4) = 9 - (-4)^2 = 9 - 16 = -7$

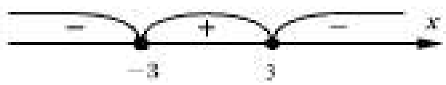
$-7 < 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "-".

$0 \in (-3; 3)\colon y(0) = 9 - 0^2 = 9$

$9 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".

$4 \in (3; \infty)\colon y(4) = 9 - 4^2 = 9 - 16 = -7$

$-7 < 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "-".



Знак неравенства ≤ 0, значит, берем отрицательные значения:

$x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

$$x + 5 < 0$$

$$x < -5$$

Общее решение двух неравенств: $x \in (-\infty; -5)$

Ответ: $x \in (-\infty; -5)$.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

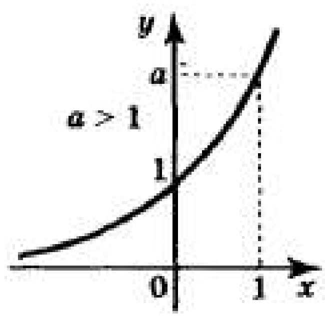
Практическая работа №2 Построение графиков степенных функций. Решение равносильных и иррациональных уравнений и неравенств № 11-13.

Тема 3.1. Показательная функция, ее свойства и график.

Цель: Познакомиться с понятием показательной функции. Научится определять вид схематического графика, свойства и строить его по точкам в зависимости от основания.

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$,$a > 0$, $a \neq 1$. Она принимает различный вид в зависимости от значения основания a.

Свойства показательной функции:

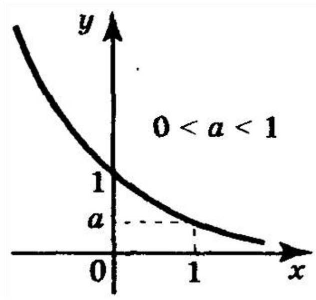


Областью определения показательной функции является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; \infty)$.

Область значений: $y \in (0; \infty)$.

Функция не является ни четной, ни нечетной.

Ограничена снизу.



Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Показательная функция убывает при $x \in (-\infty; \infty)$, если $0 < a < 1$, и возрастает, если $a > 1$.

Свойства показательной функции:

1. $a^x > 1$, если $a > 1$, то $x > 0$
2. $a^x > 1$, если $0 < a < 1$, то $x < 0$
3. $0 < \mathrm{a}^\mathrm{x} < 1$, если $0 < a < 1$, то $x > 0$
4. $0 < \mathrm{a}^\mathrm{x} < 1$, если $a > 1$, то $x < 0$
5. $a^{x_1} < a^{x_2}$, если $a > 1$, $x_1 < x_2$
6. $\mathrm{a}^{\mathrm{x}_1} > \mathrm{a}^{\mathrm{x}_2}$, если $0 < a < 1$, $\mathrm{x}_1 > \mathrm{x}_2$.

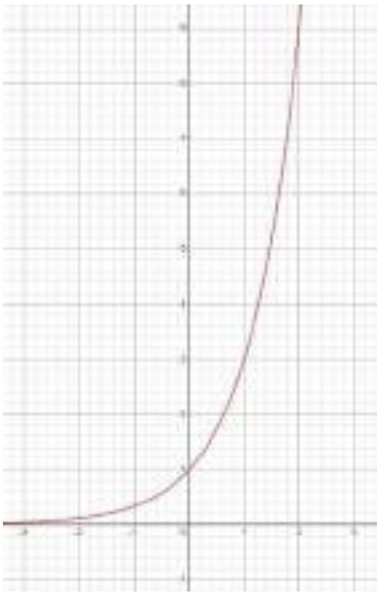
Пример №1: Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция : а) $y = 0{,}3^{-x} = \left(\frac{1}{0{,}3}\right)^x > 1, \uparrow$ б) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x} = 7^x > 1, \uparrow$

в) $y = 1{,}3^{-2x} = \left(\frac{1}{1{,}3^2}\right)^x < 1, \downarrow$ г) $y = 0{,}7^{-3x} = \left(\frac{1}{0{,}7^3}\right)^x > 1, \uparrow$

Пример №2: Построить график функции: $y = 3^x$.

Построим график функции по произвольным точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях: Практическая работа №3 Показательная функция. Решение показательных уравнений и неравенств № 1-3.

Тема 3.2. Показательные уравнения и неравенства.

Цель: Познакомиться с понятиями показательных уравнений и неравенств. Научиться применять алгоритмы решения показательных уравнений и неравенств.

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Теорема 1. Показательное уравнение $A^{F(X)} = A^{G(X)}$ (где $A > 0$, $A \neq 1$) равносильно уравнению $F(X) = G(X)$.

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Теорема 2. Если $A > 1$, то неравенство $A^{F(X)} > A^{G(X)}$ равносильно неравенству того же смысла: $F(X) > G(X)$. Если $0 < A < 1$, то показательное неравенство $\mathrm{A}^{\mathrm{F(X)}} > \mathrm{A}^{\mathrm{G(X)}}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $F(X) < G(X)$.

Теорема 3. Если $A > 1$, то неравенство $A^{F(X)} < A^{G(X)}$ равносильно неравенству того же смысла: $F(X) < G(X)$. Если $0 < A < 1$, то показательное неравенство $\mathrm{A}^{\mathrm{F(X)}} < \mathrm{A}^{\mathrm{G(X)}}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $\mathrm{F(X)} > \mathrm{G(X)}$.

Пример №1: Найти координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = 2^x$ и $y = 8$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$x = 2$

Пример №2: Решить уравнения:

а) $4^{x-1} = 1$

$4^{x-1} = 4^0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

б) $27^x = \frac{1}{3}$

$3^{3x} = 3^{-1}$

$3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

в) $3 \cdot 9^x = 81$

$3 \cdot 3^{2x} = 3^4$

$3^{2x+1} = 3^4$

$2x + 1 = 4$

$2x = 3$

$x = 1{,}5$

г) $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$

$3^{x+0{,}5+x-2} = 3^0$

$x + 0{,}5 + x - 2 = 0$

$2x - 1{,}5 = 0$

$2x = 1{,}5$

$x = 0{,}75$

д) $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$

$0{,}6^{x+3} = 0{,}6^{2x-5}$

$x + 3 = 2x - 5$

$x - 2x = -5 - 3$

$-x = -8$

$x = 8$

е) $5^x = 8^x$

$x = 0$

ж) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

$3^x = t$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$t_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\cdot1} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$t_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\cdot1} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$3^x = 3 \qquad 3^x = 1$

$x = 1 \qquad x = 0$

з) $3^{x^2+x-12} = 1$

$3^{x^2+x-12} = 3^0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2\cdot1} = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2\cdot1} = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

Пример №3: Решить неравенства:

а) $3^x > 9$

$3^x > 3^2$ ($3 > 1$ ⟹знак не меняется)

$x > 2$

$x \in (2; \infty)$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ($\frac{1}{2} < 1$ ⟹знак меняется)

$x < 2$

$x \in (-\infty; 2)$

в) $2^{3x} \geq \frac{1}{2}$

$2^{3x} \geq 2^{-1}$

($2 > 1$ ⟹знак не меняется)

$3x \geq -1$

$x \geq -\frac{1}{3}$

$x \in \left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №3 Показательная функция. Решение показательных уравнений и неравенств № 4-6.

Тема 4.1. Логарифмы и их свойства.

Цель: Познакомиться с понятием логарифма числа и его свойствами. Научится вычислять логарифмы и использовать их свойства для упрощения логарифмических выражений.

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

$b > 0, a > 0, a \neq 1, \log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \log_a a^x = x.$

Свойства логарифмов:

1. $a^{\log_a b} = b$ - Основное логарифмическое тождество.

2. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

3. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

4. $\log_a b^m = m \log_a b$

5. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$

6. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$

7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Пример №1: Найти логарифмы чисел по основанию 3:

а) $\log_3 3 = \log_3 3^1 = 1$ б) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ в) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

г) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$ д) $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$ е) $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$

ж) $\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 3^{-5} = -5$ з) $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ и) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

Пример №2: Вычислить:

а) $3^{\log_3 18} = 18$ б) $5^{\log_5 16} = 16$ в) $10^{\log_{10} 2} = 2$

г) $\frac{1}{4}^{\log_{\frac{1}{4}} 6} = 6$ д) $3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32$ е) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6} = 3^{\log_3 6^2} = 6^2 = 36$

ж) $8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = 5^3 = 125$ з) $16^{\log_4 7} = 4^{2\log_4 7} = 7^2 = 49$

Пример №3: Решить уравнение:

а) $\log_6 x = 3$ ОДЗ: $x > 0$

$x = 6^3$

$x = 216$

б) $\log_5 x = 4$ ОДЗ: $x > 0$

$x = 5^4$

$x = 625$

в) $\log_{\frac{1}{6}}(0{,}5 + x) = -1$ ОДЗ: $0{,}5 + x > 0$; $x > -0{,}5$

$0{,}5 + x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

$0{,}5 + x = 6$

$x = 5{,}5$

Пример №4: Выяснить, при каких значениях x существует логарифм:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(4 - x)$

ОДЗ:

$4 - x > 0$

$-x > -4$

$x < 4$

$x \in (-\infty; 4)$

б) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$

ОДЗ:

$1 - 2x > 0$

$-2x > -1$

$x < 0{,}5$

$x \in (-\infty; 0{,}5)$

в) $\log_{\frac{1}{4}} -x^2$

ОДЗ:

$-x^2 > 0$

$x^2 < 0$

x^2 не может быть < 0

решений нет

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №4 Вычисление логарифмов № 1-3.

Тема 4.2. Десятичные и натуральные логарифмы. Число е. Формула перехода к новому основанию.

Цель: Познакомиться с понятиями десятичного и натурального логарифма числа, числом е, формулой перехода к новому основанию. Научится вычислять десятичные и натуральные логарифмы, пользоваться формулой перехода к новому основанию.

Десятичный логарифм— логарифм с основанием 10, который обозначается как lg.

Натуральный логарифм — логарифм с основанием e, обозначается ln. $e \approx 2{,}7$.

Формула перехода к новому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Пример №1: Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7:

$\log_5 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 5}$

Пример №2: Решить уравнение:

а) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$ ОДЗ: $x > 0$

$\log_5 x = \log_5 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\log_5 2$

$\log_5 x = \log_5 3^2 + 2\log_5 2$

$\log_5 x = \log_5 3^2 + \log_5 2^2$

$\log_5 x = \log_5 9 + \log_5 4$

$\log_5 x = \log_5 9 \cdot 4$

$\log_5 x = \log_5 36$

$x = 36$

б) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$ ОДЗ: $x > 0$

$\log_3 x = \frac{1}{3} \cdot 9\log_3 8 - \log_3 4^3$

$\log_3 x = 3\log_3 8 - \log_3 4^3$

$\log_3 x = \log_3 8^3 - \log_3 4^3$

$\log_3 x = \log_3 \frac{8^3}{4^3}$

$\log_3 x = \log_3 2^3$

$\log_3 x = \log_3 8$

$x = 8$

в) $\log_2 x + \log_8 x = 8$ ОДЗ: $x > 0$

$\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 8$

$\log_2 x + \log_2 x^{\frac{1}{3}} = 8$

$\log_2 x^{1+\frac{1}{3}} = 8$

$\log_2 x^{\frac{4}{3}} = 8$

$x^{\frac{4}{3}} = 2^8 \quad \Big|\wedge \frac{3}{4}$

$x = 2^{8 \cdot \frac{3}{4}}$

$x = 2^6$

$x = 64$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №4 Вычисление логарифмов № 5-6.

Тема 4.3. Преобразование логарифмических выражений.

Цель: Закрепить навыки упрощения и преобразования логарифмических выражений.

Для упрощения и преобразования логарифмических выражений нам понадобятся свойства логарифмов.

Свойства логарифмов:

1. $a^{\log_a b} = b$ - Основное логарифмическое тождество.
2. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
3. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
4. $\log_a b^m = m \log_a b$
5. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
6. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$
7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Пример №1: Вычислить:

а) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 10 = 1$	б) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \frac{15 \cdot 16}{15} = \log_2 16 = 4$
в) $\log_{13} \sqrt[5]{169} = \log_{13} 13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$	г) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2^4} = \frac{3 \log_3 2}{4 \log_3 2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$
д) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} = \frac{\log_5 \frac{36}{12}}{\log_5 3^2} = \frac{\log_5 3}{2 \log_5 3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	

е) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 \frac{12 \cdot 20}{15} = \log_8 16 = \frac{1}{3}\log_2 2^4 = \log_2 2^{4 \cdot \frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3}$
ж) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21} = \log_7 36^{\frac{1}{2}} - \log_7 14 - \log_7\left(\sqrt[3]{21}\right)^3 =$ $= \log_7 6 - \log_7 14 - \log_7 21 = \log_7 \frac{6}{14 \cdot 21} = \log_7 \frac{1}{49} = -2$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

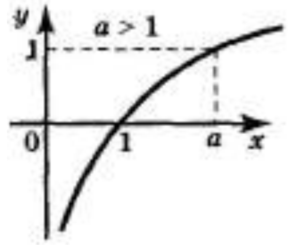
Практическая работа №4 Вычисление логарифмов № 4.

Тема 4.4. Логарифмическая функция, ее свойства и график.

Цель: Познакомиться с понятием логарифмической функции. Научится определять вид схематического графика, свойства и строить его по точкам в зависимости от основания.

Функцию вида $y = \log_a x$, где a – любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием a . Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x \in (0; \infty)$.

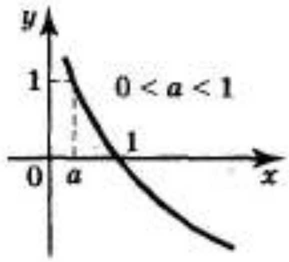
График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания a.



Свойства логарифмической функции:

Область определения логарифмической функции: $x \in (0; \infty)$.

Область значений: $y \in (0; \infty)$.



Функция не является ни четной, ни нечетной.

Логарифмическая функция убывает при $x \in (0; \infty)$, если $0 < a < 1$, и возрастает, если $a > 1$.

Не является ограниченной.

Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Пример №1: Сравнить числа:

а) $\log_3 \frac{6}{5} > \log_3 \frac{5}{6}$ (т.к. $3 > 1$)

б) $\log_{\frac{1}{2}} e > \log_{\frac{1}{2}} \pi$ (т.к. $\frac{1}{2} < 1$)

Пример №2: Выяснить, является ли положительным или отрицательным число: а) $\log_3 4{,}5 > 0$ (т.к. $3 > 1$ и $4{,}5 > 1$)

б) $\log_5 25{,}3 > 0$ (т.к. $5 > 1$ и $25{,}3 > 1$)

Пример №3: Построить график функции: $y = \log_2 x$

Построим график функции по произвольным точкам:

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$

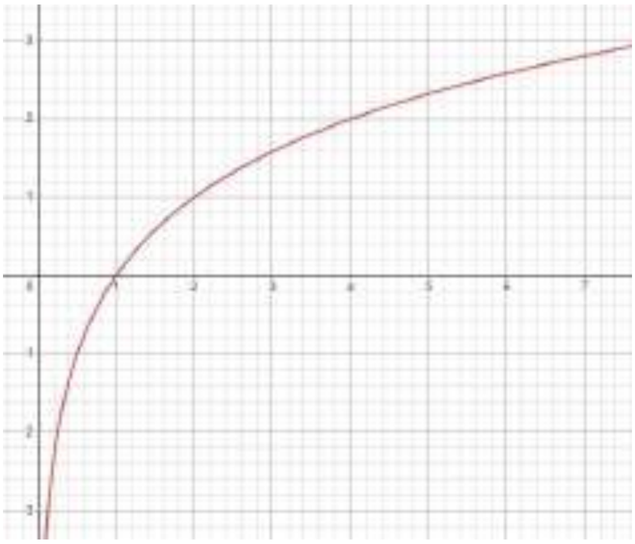
$\log_2 \frac{1}{2} = -1$

$\log_2 1 = 0$

$\log_2 2 = 1$

$\log_2 4 = 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



Пример №4: Решить неравенство:

а) $\log_5 x > \log_5 3$ (т.к. $5 > 1$) ОДЗ:

$x > 3$ $x > 0$

Общее решение неравенства и ОДЗ:: $x \in (3; \infty)$

б) $\lg x < \lg 4$ (т.к. $10 > 1$) ОДЗ:

$x < 4$ $x > 0$

Общее решение неравенства и ОДЗ: $x \in (0; 4)$

в) $\log_3 x < 2$ (т.к. $3 > 1$) ОДЗ:

$x < 3^2$ $x > 0$

$x < 9$

Общее решение неравенства и ОДЗ: $x \in (0; 9)$

г) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 6$ (т.к. $\frac{1}{2} < 1$) ОДЗ:

$x > 0$

$x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$x \leq \frac{1}{64}$

Общее решение неравенства и ОДЗ: $x \in \left(0; \frac{1}{64}\right]$

Пример №5: Решить уравнение:

а) $\log_3(5x-1)=2$ ОДЗ:

$5x-1=3^2$ $5x-1>0$

$5x-1=9$ $5x>1$

$5x=10$ $x>0{,}2$

$x=2$

б) $\log_4(2x-3)=1$ ОДЗ:

$2x-3=4^1$ $2x-3>0$

$2x-3=4$ $2x>3$

$2x=7$ $x>1{,}5$

$x=3{,}5$

в) $\lg(3x-1)=0$ ОДЗ:

$3x-1=10^0$ $3x-1>0$

$5x-1=1$ $3x>1$

$5x=2$ $x>\frac{1}{3}$

$x=0{,}4$

Пример №6: Найти область определения:

а) $y=\log_4(x-1)$

ОДЗ:

$x-1>0$

$x>1$

$x\in(1;\infty)$

$D(y):(1;\infty)$

б) $y=\log_4(x^2+2x)$

ОДЗ:

$x^2+2x>0$

$x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=0$ или $x+2=0$

$x=-2$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.

Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак функции:

$-3\in(-\infty;-2): y(-3)=(-3)^2+2\cdot(-3)=9-6=5$

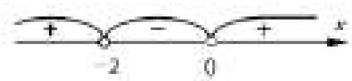
$5 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".

$-1 \in (-2; 0): y(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = -1$

$-1 < 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "-".

$2 \in (0; \infty): y(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$

$8 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".



Знак неравенства > 0, значит берем положительные значения:

$x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$

$D(y): (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №5 Построение графиков логарифмических функций. Логарифмические уравнения и неравенства № 1-6.

Тема 4.5. Логарифмические уравнения.

Цель: Познакомиться с понятиями логарифмических уравнений. Научиться применять алгоритмы решения логарифмических уравнений.

Логарифмическими называются уравнения, в которых переменная или рациональная функция находятся под знаком логарифма.

Теорема 1. Логарифмическое уравнение $\log_a b = \log_a c$ равносильно уравнению: $b = c$, если $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример №1: Решить уравнение:

а) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$

$\log_2(x-5)(x+2) = 3$

$(x-5)(x+2) = 2^3$

$x^2 + 2x - 5x - 10 = 8$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 9 + 72 = 81$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

ОДЗ:

$x - 5 > 0$

$x > 5$

$x + 2 > 0$

$x > -2$

Общее решение двух неравенств: $x \in (5; \infty)$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{81}}{2\cdot 1} = \frac{3-9}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \notin$ ОДЗ

б) $\lg(x-1) - \lg(2x-11) = \lg 2$

$\lg\left(\frac{x-1}{2x-11}\right) = \lg 2$

$\frac{x-1}{2x-11} = 2$

$x - 1 = 2(2x - 11)$

$x - 1 = 4x - 22$

$x - 4x = -22 + 1$

$-3x = -21$

$x = 7$

ОДЗ:

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$2x - 11 > 0$

$2x > 11$

$x > 5{,}5$

Общее решение двух неравенств:

$x \in (5{,}5; \infty)$

в) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$

$5x + 3 = 7x + 5$

$5x - 7x = 5 - 3$

$-2x = 2$

$x = -1 \notin$ ОДЗ

Общее решение двух неравенств: $x \in (-0{,}6; \infty)$

ОДЗ:

$5x + 3 > 0$

$5x > -3$

$x > -0{,}6$

$7x + 5 > 0$

$7x > -5$

$x > -\frac{5}{7}$

г) $\log_7(x-1)\log_7 x = \log_7 x \;\; |: \;\log_7 x$

$\log_7(x-1) = 1$

$x - 1 = 7^1$

$x - 1 = 7$

$x = 8$

$\log_7 x = 0$

$x = 7^0$

$x = 1 \notin$ ОДЗ

ОДЗ:

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x \in (1; \infty)$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №5 Построение графиков логарифмических функций. Логарифмические уравнения и неравенства № 8-10.

Тема 4.6. Логарифмические неравенства.

Цель: Познакомиться с понятиями логарифмических неравенств. Научиться применять алгоритмы решения логарифмических неравенств.

Логарифмическими называются неравенства, в которых переменная или рациональная функция находятся под знаком логарифма.

Теорема 1. Если $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, то: при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} > \log_{\mathrm{a}} \mathrm{c}$ равносильно неравенству $b > c$; при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} > \log_{\mathrm{a}} \mathrm{c}$ равносильно неравенству с противоположным смыслом $b < c$.

Теорема 2. Если $b > 0$, $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, то: при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_{\mathrm{a}} \mathrm{b} < \log_{\mathrm{a}} \mathrm{c}$ равносильно неравенству $b < c$; при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b < \log_a c$ равносильно неравенству с противоположным смыслом $b > c$.

Пример №1: Найти область определения: $y = \lg(3x - 2)$

ОДЗ:

$3x - 2 > 0$

$3x > 2$

$x > \frac{2}{3}$

$x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$

$D(y): \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$

Пример №2: Решить неравенство:

а) $\log_3(x + 2) < 3$	ОДЗ:
$x + 2 < 3^3$	$x + 2 > 0$
$x + 2 < 27$	$x > -2$
$x < 25$	

Общее решение неравенства и ОДЗ: $x \in (-2; 25)$

б) $\lg x > \lg 8 + 1$	ОДЗ:
$\lg x - \lg 8 > 1$	$x > 0$

$\lg\left(\frac{x}{8}\right) > 1$ $(10 > 1 \Rightarrow$знак не меняется)

$\frac{x}{8} > 10^1$

$\frac{x}{8} > 10$

$x > 80$

Общее решение неравенства и ОДЗ: $x \in (80; \infty)$

в) $\log_{15}(x-3) + \log_{15}(x-5) < 1$

$\log_{15}(x-3)(x-5) < 1$

$(x-3)(x-5) < 15^1$

$x^2 - 5x - 3x + 15 < 15$

$x^2 - 8x < 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x-8) = 0$

$x = 0$ или $x - 8 = 0$

$x = 8$

ОДЗ:

$x - 3 > 0$

$x > 3$

$x - 5 > 0$

$x > 5$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.

Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак функции:

$-3 \in (-\infty; 0)$: $y(-3) = (-3)^2 - 8 \cdot (-3) = 9 + 24 = 33$

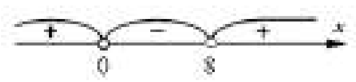
$33 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".

$1 \in (0; 8)$: $y(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$

$-7 < 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "-".

$9 \in (8; \infty)$: $y(9) = 9^2 - 8 \cdot 9 = 81 - 72 = 9$

$9 > 0$, следовательно, функция на данном промежутке имеет знак "+".



Знак неравенства < 0, значит берем отрицательные значения: $x \in (0; 8)$

Общее решение неравенства и ОДЗ: $x \in (5; 8)$

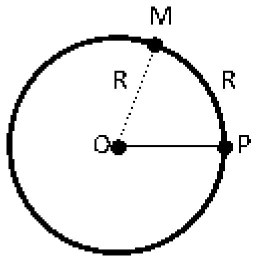
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №5 Построение графиков логарифмических функций. Логарифмические уравнения и неравенства № 7.

Тема 5.1. Радианная мера угла. Определение синуса, косинуса и тангенса угла.

Цель: Познакомиться с понятиями радианной меры угла, определениями синуса, косинуса и тангенса угла. Научиться переводить углы из радиан в градусы и обратно, вычислять значения синуса, косинуса и тангенса угла по таблице.

Радианная мера угла.



Наравне с градусной мерой угла используется радианная. Возьмем на координатной плоскости окружность с центром в точкеO и радиусомR. Отметим на ней дугу PM, длина которой равна R и $\angle POM$.

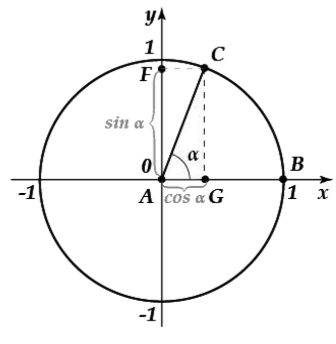
$\pi \approx 3{,}14$, 1 рад $\approx\ 57{,}3^0$.

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

1 рад $= \left(\frac{180^0}{\pi}\right)$, $1^0 = \frac{\pi}{180}$ рад.

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.



Дадим определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла поворота α с позиций тригонометрии. Пусть начальная точка $B(1{,}0)$ при повороте на угол α около точки A переходит в точку $C(x, y)$.

Синус угла поворотаα- это ордината точки $C(x, y)$, то есть, $\sin\alpha = y$. Косинусом угла α называют абсциссу точки $C(x, y)$, то есть, $\cos\alpha = x$.

Тангенс угла α - это отношение ординаты точки $C(x, y)$ к ее абсциссе, то есть, $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$.

Котангенсом угла поворота α называют отношение абсциссы точки $C(x, y)$ к ее ординате, то есть, $\text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$.

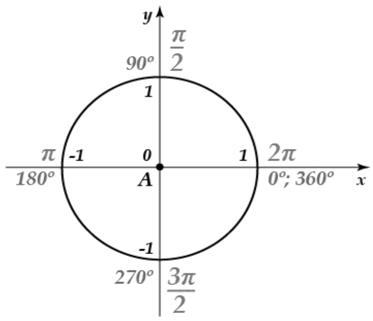


Таблица значений углов тригонометрических функций:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
α	$\mathbf{0}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Пример 1: Найти радианную меру угла равного: 105°

105° = 105·π/180 = 7π/12

Пример 2: Найти градусную меру угла, выраженного в радианах: 2π/3

2π/3 = 2·180°/6 = 120°

Пример 3: Вычислить:

Воспользуемся «Таблицей значений углов тригонометрических функций»

а) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = 1 - 1 = 0$

б) $\sin\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$

в) $\sin\pi + \sin 1{,}5\,\pi = 0 + \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

г) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - tg\,\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 1{,}5 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1{,}5$

д) $\left(2tg\,\frac{\pi}{6} - tg\,\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6} = \left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{4}{3} - 2 = \frac{4-6}{3} = -\frac{2}{3}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №6 Определение синуса, косинуса и тангенса угла. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла № 1-3.

Тема 5.2. Поворот точки вокруг начала координат.

Цель: Научиться вращать точку вокруг начала координат, определять значения синуса, косинуса и тангенса не табличных углов.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют единичной окружностью. Введем понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α радиан, где α – любое действительное число.

Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 1). Конечную точку пути обозначим M. В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α радиан.

Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α радиан означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длинной $|\alpha|$ (рис. 2).

Поворот на 0 радиан означает, что точка остается на месте.

Приведем таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мерах (рис. 3). Отметим, что при повороте точки $P(1;0)$ на 2π, т.е. на 360^0, точка возвращается на первоначальное положение (см. таблицу). При повороте точки на -2π, т.е. на -360^0, она также возвращается в первоначальное положение.

Пример 1: Рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4).

При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и проходит еще путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении.

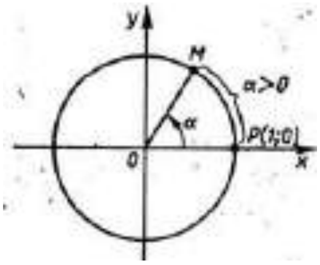


рис. 1

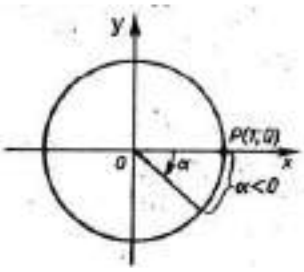


рис. 2

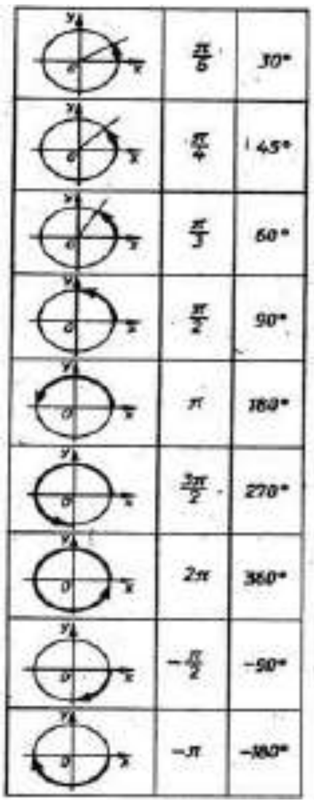


рис. 3

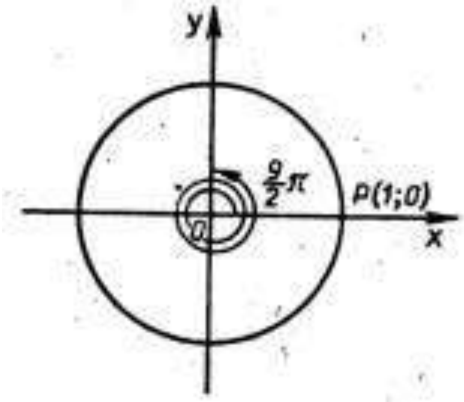


рис. 4

Пример 2: Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

а) $\beta = 3\pi$.

$\beta = 3\pi - 2\pi = \pi$

$\sin 3\pi = \sin \pi = 0$

$\cos 3\pi = \cos \pi = -1$

б) $\beta = \frac{5}{2}\pi$.

$\beta = \frac{5}{2}\pi - 2\pi = \frac{5\pi - 4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\sin \frac{5}{2}\pi = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos \frac{5}{2}\pi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Пример 3: Может ли $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ быть равным:

а) $0{,}049$ (да) б) $-0{,}875$ (да) в) $-\sqrt{2}$ (нет) г) $2 + \sqrt{2}$ (нет)

$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ принимают значения от -1 до 1.

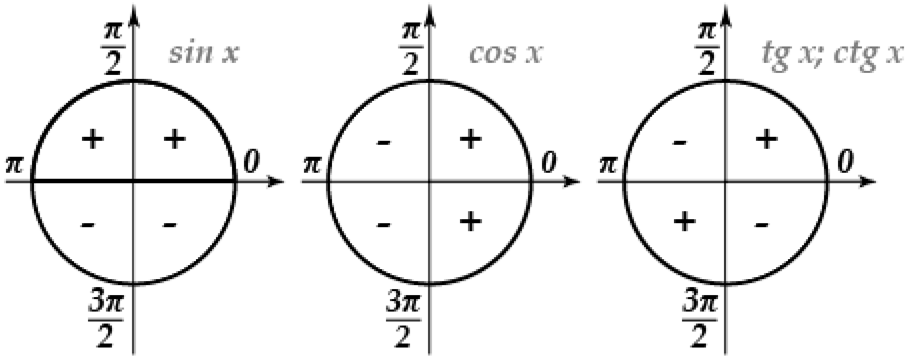
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №6 Определение синуса, косинуса и тангенса угла. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла № 4.

Тема 5.3. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла.

Цель: Научиться определять знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.

Знаки синуса, косинуса, тангенс и котангенса.



Пример 1: Определить знак числа $\sin\alpha$, если: а) $\alpha = \frac{5\pi}{4} = 1{,}25\pi$ (-)

б) $\alpha = -\frac{4\pi}{3} = -1{,}3\pi$ (+) в) $\alpha = 5{,}1 = \frac{5{,}1\pi}{3{,}14} = 1{,}62\pi$ (-)

Пример 2: Определить знак числа $\cos\alpha$, если: а) $\alpha = \frac{2\pi}{3} = 0{,}6\pi$ (-)

б) $\alpha = -\frac{2\pi}{5} = -0{,}4\pi$ (+) в) $\alpha = -5{,}3 = -\frac{5{,}3\pi}{3{,}14} = -1{,}6\pi$ (+)

Пример 3: Определить знак числа $tg\alpha$, если: а) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = 0{,}8\pi$ (-)

б) $\alpha = -\frac{5\pi}{4} = -1{,}25\pi$ (-) в) $\alpha = -1{,}3 = -\frac{1{,}3\pi}{3{,}14} = -0{,}4\pi$ (-)

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №6 Определение синуса, косинуса и тангенса угла. Знаки синуса, косинуса и тангенса угла № 5-7.

Тема 5.4. Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла.

Цель: Познакомиться с формулами зависимости между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла. Научиться применять основные тригонометрических тождества для вычисления значений тригонометрических функций по одной из них.

Соотношения между основными тригонометрическими функциями – $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ задаются тригонометрическими формулами.

Тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Основные тригонометрические тождества представляют собой равенства, устанавливающие связь между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного угла, и позволяют находить любую из этих тригонометрических функций через известную другую.

Пример 1: Может ли $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$ быть равным:

а) $0{,}03$ (да) б) $\frac{2}{3}$ (да) в) $\frac{5}{3}$ (нет) г) $\frac{11}{13}$ (да) д) $-\frac{13}{11}$ (нет) е) $\sqrt{2}$ (да)

Пример 2: По значению одной из тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) найти значения остальных трех:

а) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

б) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

$$0{,}8^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$0{,}64 + cos^2\alpha = 1$$

$\sin^2\alpha + \frac{25}{169} = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$

$\sin^2\alpha = \frac{169-25}{169}$

$\sin^2\alpha = \frac{144}{169}$

$\sin\alpha = \pm\frac{12}{13}$

$\sin\alpha = -\frac{12}{13}$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{13} : \frac{5}{13} = -\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5} = -2{,}4$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{12} = -\frac{5}{12}$

$cos^2\alpha = 1 - 0{,}64$

$cos^2\alpha = 0{,}36$

$\cos\alpha = \pm 0{,}6$

$\cos\alpha = -0{,}6$

$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8 : (-0{,}6) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$

$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4} = -0{,}75$

в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$

$\left(\frac{15}{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{225}{64} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{225+64}{64} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{289}{64}$

$\cos^2\alpha = \frac{64}{289}$

$\cos\alpha = \pm\frac{8}{17}$

$\cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin^2\alpha + \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{64}{289} = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{289}$

$\sin^2\alpha = \frac{289-64}{289}$

$\sin^2\alpha = \frac{225}{289}$

г) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\frac{1+9}{9} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{10}{9}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{10}$

$\sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + cos^2\alpha = 1$

$\frac{9}{10} + cos^2\alpha = 1$

$cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{10}$

$cos^2\alpha = \frac{1}{10}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha = \pm\frac{15}{17}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha = \frac{15}{17}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 1.

Тема 5.5. Тригонометрические тождества.

Цель: Закрепить навыки вычисления значений тригонометрических функций по одной из них с помощью основных тригонометрических тождеств.

Пример 1: Доказать тождество:

а) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha$;

$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = 1^2 - cos^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

б) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$;

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$

в) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$

$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Пример 2: Упростить выражение:

а) $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha - 2\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\sin\alpha = \sin\alpha - 2\sin\alpha = -\sin\alpha$

б) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} = 1-\cos\alpha$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 2-3.

Тема 5.6. Синус, косинус и тангенс углов α и -α.

Цель: Познакомиться с формулами синуса, косинуса и тангенса углов α и -α. Научиться упрощать и находить значение выражений,

содержащих синус, косинус, тангенс и котангенс угла с помощью тригонометрических формул синуса, косинуса и тангенса углов α и -α.

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и $-\alpha$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{ctg}\,(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Для того, чтобы избавиться от отрицательного значения градусной меры угла при вычислении синуса, косинуса или тангенса, можно воспользоваться следующими тригонометрическими преобразованиями (тождествами), основанными на принципах четности или нечетности тригонометрических функций.

Пример 1: Вычислить:

а) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{6}}{1+\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1+\frac{3}{9}}{1+3} = \frac{1\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$

б)$\cos(-\pi) + \mathrm{ctg}\,\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{ctg}\,\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \cos\pi - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} - \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = -1 - 0 - 1 - 1 = -3;$

Пример 2: Упростить выражение:

а) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cdot\cos\alpha + \sin\alpha = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha + \sin\alpha =$

$= -\sin\alpha + \sin\alpha = 0$

б) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 4-6.

Тема 5.7. Формулы сложения.

Цель: Познакомиться с формулами сложения. Научиться упрощать и находить значение выражений, содержащих синус, косинус, тангенс и котангенс угла с помощью тригонометрических формул сложения.

Формулы сложения:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

3. $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$

4. $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{-1 \pm \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}$

Тригонометрические формулы сложения показывают, как тригонометрические функции суммы или разности двух углов выражаются через тригонометрические функции этих углов.

Пример 1: Вычислить:

а) $\cos 57°30' \cdot \cos 27°30' + \sin 57°30' \cdot \sin 27°30' =$

$= \cos\left(57°30' - 27°30'\right) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos\frac{7\pi}{9} \cdot \cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9} \cdot \sin\frac{11\pi}{9} = \cos\left(\frac{7\pi}{9} + \frac{11\pi}{9}\right) = \cos\frac{18\pi}{9} = \cos 2\pi = 1.$

Пример 2: Вычислить: $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{1}{3} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{3-1}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$

$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ от $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\cos\alpha > 0$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 7-9.

Тема 5.8. Формулы двойного угла.

Цель: Познакомиться с формулами двойного угла. Научиться упрощать и находить значение выражений, содержащих синус, косинус, тангенс и котангенс угла с помощью тригонометрических формул двойного угла.

Формулы двойного угла:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
4. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
5. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
6. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

Формулы двойного показывают, как тригонометрические функции двойных углов выражаются через тригонометрические функции одинарного угла α.

Пример 1: Вычислить:

а) $2\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sin 2\cdot\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos 2\cdot\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\frac{2\cdot\operatorname{tg}15^0}{1-\operatorname{tg}^2 15^0} = \operatorname{tg} 2\cdot\frac{\pi}{8} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin 2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= -1$

Пример 2: Вычислить: $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$

$\cos^2 \alpha = \frac{25-9}{25}$

$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$

$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$

$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 10-12.

Тема 5.9. Формулы половинного угла.

Цель: Познакомиться с формулами половинного угла. Научиться упрощать и находить значение выражений, содержащих синус, косинус, тангенс и котангенс угла с помощью тригонометрических формул половинного угла.

Формулы половинного угла:

1. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{2}$
2. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$
3. $\mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$
4. $\mathrm{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}$

Формулы половинного угла показывают, как тригонометрические функции половинного угла $\frac{\alpha}{2}$ выражаются через косинус целого угла α. Эти тригонометрические формулы следуют из формул двойного угла.

Пример 1: Вычислить:

а) $2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2\cdot\frac{\pi}{8}}{2}\right) - 1 = 1 + \cos\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \sin^2 15^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1-\cos 2\cdot 15^0}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \cos 30^0 =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

Пример 2: Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$, если:

а) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}8}{2} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}1}$

от $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\sin\alpha < 0$

$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0{,}1}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+0{,}8}{2} = \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}9}$

от $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\cos\alpha > 0$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}9}$

$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}$

$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

от $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$

$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$

$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1{,}8}{0{,}2} = 9$

$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

от $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$

$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = -3$

б) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$

от $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\cos\alpha < 0$

$\cos\alpha = -\frac{3}{5} = -0{,}6$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-(-0{,}6)}{2} = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}8}$

от $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\sin\alpha < 0$

$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0{,}8}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1+(-0{,}6)}{2} = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{0{,}2}$

от $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\cos\alpha < 0$

$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0{,}2}$

$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4$

$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

от $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$

$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 2$

$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

от $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$

$\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 13-14.

Тема 5.10. Формулы приведения.

Цель: Познакомиться с формулами приведения. Научиться упрощать и находить значение выражений, содержащих синус, косинус, тангенс и котангенс угла с помощью тригонометрических формул приведения.

Формулами приведения называют формулы, которые позволяют перейти от тригонометрических функций вида $\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$; $\cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$; $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$; $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right)$ к функциям аргумента α.

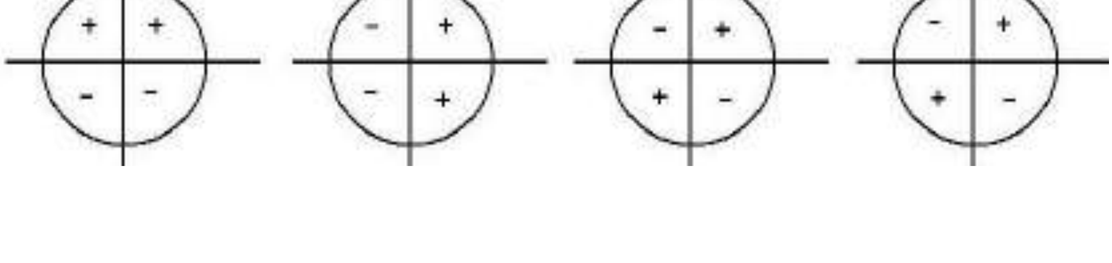
С их помощью синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла можно привести к синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу угла из интервала от 0 до 90 градусов (от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиан). Таким образом, формулы приведения позволяют нам переходить к работе с углами в пределах 90 градусов, что, несомненно, очень удобно.

Для использования формул приведения существует два правила.

1. Если угол можно представить в виде $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, то название функции меняется sin на cos, cos на sin, tg на ctg, ctg на tg. Если же угол можно представить в виде $(\pi \pm \alpha)$ или $(2\pi \pm \alpha)$, то название функции остается без изменений.

2. Знак приведенной функции остается прежним. Если исходная функция имела знак «плюс», то и приведенная функция имеет знак «плюс». Если исходная функция имела знак «минус», то и приведенная функция имеет знак «минус».

На рисунке ниже представлены знаки основных тригонометрических функций в зависимости от четверти.



Пример №1: Вычислить:

а) $\sin 150^0$.

Воспользуемся формулами приведения: $\sin 150^0$ находится во второй четверти, по рисунку видим, что знак sin в этой четверти равен "+". Значит у приведенной функции тоже будет знак «+». Это мы применили второе правило.

Теперь $150^0 = 90^0 + 60^0$. 90^0 это $\frac{\pi}{2}$. То есть имеем дело со случаем

$\frac{\pi}{2} + 60^0$, следовательно, по первому правилу меняем функцию с $\sin$ на $\cos$.

В итоге получаем $\sin 150^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Упростить выражение:

а) $\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$

б) $\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$

в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

г) $\frac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{(-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}{\sin\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha =$

$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 18.

Тема 5.11. Сумма и разность синусов, косинусов.

Цель: Познакомиться с формулами суммы и разности синусов, косинусов. Научиться упрощать и находить значение выражений, содержащих синус, косинус угла с помощью тригонометрических формул суммы и разности синусов, косинусов.

Формулы суммы и разности:

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

Основное предназначение формул суммы и разности тригонометрических функций заключается в переходе к произведению функций, что очень полезно при упрощении тригонометрических выражений. Указанные формулы также широко используются при решении тригонометрических уравнений, так как позволяют раскладывать на множители сумму и разность синусов и косинусов.

Пример 1: Упростить выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = 2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha+\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha-\frac{\pi}{3}+\alpha}{2} =$

$= 2\cdot\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha}{2} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha.$

б) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) =$

$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right) =$

$= 2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2} =$

$= 4\cdot\sin\frac{2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\frac{2\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{2\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha}{2} = 4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha =$

$= 4\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha.$

Пример 2: Вычислить:

а) $\cos 105^0 + \cos 75^0 = 2\cdot\cos\frac{105^0+75^0}{2}\cdot\cos\frac{105^0-75^0}{2} =$

$= 2\cdot\cos\frac{180^0}{2}\cdot\cos\frac{30^0}{2} = 2\cdot\cos 90^0\cdot\cos 15^0 = 2\cdot 0\cdot\cos 15^0 = 0;$

б) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12} = 2\cdot\cos\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2} = 2\cdot\cos\frac{\frac{16\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{6\pi}{12}}{2} =$

$= 2\cdot\cos\frac{16\pi}{24}\cdot\cos\frac{6\pi}{24} = 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12} = 2\cdot\sin\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2} = 2\cdot\sin\frac{\frac{6\pi}{12}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{8\pi}{12}}{2} =$

$= 2 \cdot \sin\frac{6\pi}{24} \cdot \cos\frac{8\pi}{24} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 7 Тригонометрические формулы № 15-17.

Тема 6.1. Уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$.

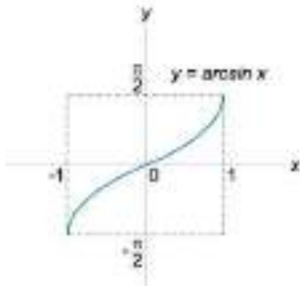
Цель: Познакомиться с определениями обратных тригонометрических функций, формулами тригонометрических уравнений $\cos x = a$, $\sin x = a$. Научиться находить значения $\arccos a$, $\arcsin a$, $\mathrm{arctg}\, a$ и $\mathrm{arcctg}\, a$, применять алгоритмы решения тригонометрических уравнений $\cos x = a$, $\sin x = a$.

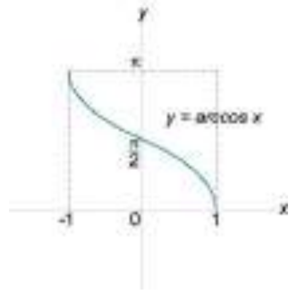
К обратным тригонометрическим функциям относятся следующие 6 функций: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс и арккосеканс.

Поскольку исходные тригонометрические функции периодические, то обратные функции, вообще говоря, являются многозначными. Чтобы обеспечить однозначное соответствие между двумя переменными, области определения исходных тригонометрических функций ограничивают, рассматривая лишь их главные ветви. Например, функция $y = \sin x$ рассматривается лишь в промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом интервале обратная функция арксинус определена однозначно.

Арксинусом числа a (обозначается $\arcsin a$) называется значение угла x в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при котором $\sin x = a$. Обратная функция $y = \arcsin x$ определена при $x \in [-1; 1]$, область ее значений равна $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

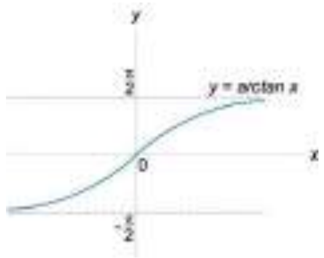
Арккосинусом числа a (обозначается $\arccos a$) называется значение угла x в интервале $[0; \pi]$, при котором $\cos x = a$. Обратная функция $y = \arccos x$ определена при $x \in [-1; 1]$, область ее значений принадлежит отрезку $y \epsilon [0; \pi]$.

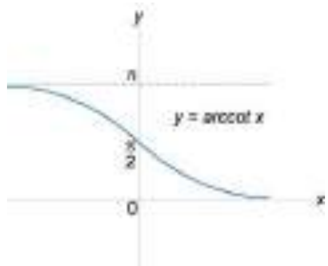




Арктангенсом числа a (обозначается $\operatorname{arctg} a$) называется значение угла x в открытом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, при котором $\operatorname{tg} x = a$. Обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена при всех $x \in R$, область значений арктангенса равна $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом числа a (обозначается $\operatorname{arcctg} a$) называется значение угла x в открытом интервале $[0; \pi]$, при котором $\operatorname{ctg} x = a$. Обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена при всех $x \in R$, область ее значений находится в интервале $y \ni [0; \pi]$.





Тригонометрическое уравнение – это уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции. Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения вида: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где a – действительное число.

Уравнение	Формулы	Простые решения
cos x = a, т.е. arccos a = x Условия: ($\lvert a \rvert \le 1$; $0 \le x \le \pi$)	arccos (-a) = π – arccos a a>0, x = ± arccos a + 2πn, a<0, x = ± (π – arccos a) + 2πn, где n ∈ Z	cos x = 0, x = π/2 + πn cos x = 1, x = 2πn cos x = –1, x = π + 2πn где n ∈ Z
sin x = a, т.е. arcsin a = x Условия:($\lvert a \rvert \le 1$; $-\pi/2 \le x \le \pi/2$)	arcsin (-a) = -arcsin a a>0 x = $(-1)^n$arcsin a + πn a<0 x = $(-1)^{n+1}$arcsin a + πn где n ∈ Z	sin x = 0, то x = πn sin x = 1, то x = π/2 + 2πn sin x = –1, то x = –π/2 + 2πn где n ∈ Z

Пример 1: Вычислить:

а) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

г) $\arcsin 0 = 0$ д) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$

ж) $2\arccos 0 + 3\arccos 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} + 3\cdot 0 = \pi$

з) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 12\cdot\frac{\pi}{6} - 3\cdot\frac{2\pi}{3} = 2\pi - 2\pi = 0$

и) $\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \arcsin 1 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

к) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi+2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Пример 2: Решить уравнение:

а) $\cos x = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} > 0, x = \pm\arccos a + 2\pi n$

$x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$

б) $\cos x = -0{,}3$

$-0{,}3 < 0, x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$

$x = \pm(\pi - \arccos 0{,}3) + 2\pi n, n \in Z$

в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{3} < 0, x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$

$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$

г) $\sin x = \frac{2}{7}$

$\frac{2}{7} > 0, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{7} + \pi n, n \in Z$

д) $\sin x = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4} < 0, x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{4} + \pi n, n \in Z$

е) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{\sqrt{5}}{3} > 0, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n, n \in Z$

ж) $\cos 4x = 1$

Простые решения: $\cos x = 1$ при

$$x = 2\pi n$$

$2x = 2\pi n$

$x = \pi n, n \in Z$

з) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$

$\cos\frac{x}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < 0, x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$

$\frac{x}{4} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$

$\frac{x}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

$x = \pm 3\pi + 8\pi n, n \in Z$

и) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)= 0$

Простые решения: $\cos x = 0$ при

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi n$

$x=\frac{3\pi-2\pi}{6}+\pi n$

$x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

к) $\sin 3x = 1$

Простые решения: $\sin x = 1$ при

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$

л) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3}= -1$

$\sin\frac{x}{3}= -\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<0, x=(-1)^{n+1}\arcsin a+\pi n$

$\frac{x}{3}=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n$

$\frac{x}{3}=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi n$

$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{3\pi}{4}+3\pi n, n\in Z$

м) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)= 0$

Простые решения: $\sin x = 0$ при

$$x=\pi n$$

$x+\frac{3\pi}{4}=\pi n$

$x=-\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 8 Решение тригонометрических уравнений и неравенств № 1.

Тема 6.2. Уравнения $\mathrm{tg}\, x=a$ и $\mathrm{ctg}\, x=a$

Цель: Познакомиться с формулами тригонометрических уравнений $\mathrm{tg}\, x=a$, $\mathrm{ctg}\, x=a$. Научиться применять алгоритмы решения тригонометрических уравнений $\mathrm{tg}\, x=a$, $\mathrm{ctg}\, x=a$.

Уравнение	Формулы	Простые решения
tg x = a, т.е. arctg a = x Условие: (–π/2 < x <π/2)	arctg (-a) = -arctg a a>0 x = arctg a + πn a<0 x = -arctg a + πn где n ∈ Z	-
ctg x = a, т.е. arcctg a = x Условие: (0 < x <π)	arcctg (-a) = π – arcctg a a>0 x = arcctg a + πn a<0 x = π – arcctg a+ πn где n ∈ Z	-

Пример 1: Вычислить:

а) $\operatorname{arctg} 0 = 0$ б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$ в) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$

г) $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

д) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6\cdot\frac{\pi}{6} + 4\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi + 4\cdot\frac{\pi}{4} = 2\pi$

Пример 2: Решить уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} > 0, x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$-\sqrt{3} < 0, x = -\operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

в) $\operatorname{tg} x = 4$

$4 > 0, x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in Z$

г) $\operatorname{tg} 3x = 0$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$3x = \operatorname{arctg} 0 + \pi n$

$3x = 0 + \pi n$

$x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

д) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$

$\operatorname{tg}\frac{x}{6} = -\sqrt{3}$

$-\sqrt{3} < 0, x = -\operatorname{arctg} a + \pi n$

$\frac{x}{6} = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n$

$\frac{x}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi n$

$x = -2\pi + 6\pi n, n \in Z$

е) $\operatorname{ctg} 5x = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} > 0, x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$

$5x = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi n$

$5x = \frac{\pi}{6} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}, n \in Z$

ж) $\operatorname{ctg} 2x = -1$

$-1 < 0, x = \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi n$

$2x = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi n$

$2x = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$

$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 8 Решение тригонометрических уравнений и неравенств № 2.

Тема 6.3. Решение тригонометрических уравнений разных видов.

Цель: Научиться применять алгоритмы решения тригонометрических уравнений разных видов, сводящихся к простейшим тригонометрическим уравнениям.

Пример 1: Решить уравнение:

а) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < 0, x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > 0, x = (-1)^{n} \arcsin a + \pi n$

$x = (-1)^{n} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$

$x = (-1)^{n} \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

б) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Введем замену переменной: $\sin x = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > 0, x = (-1)^{n} \arcsin a + \pi n$

$x = (-1)^{n} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$

$\sin x = -1$

Простые решения:

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

в) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$

Из основного тригонометрического тождества следует, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0$

$2 - 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$

$-2\sin^2 x - \sin x + 3 = 0$

Введем замену переменной: $\sin x = t$

$-2t^2 - t + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 1 + 24 = 25$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\cdot(-2)} = \frac{1+5}{-4} = -\frac{6}{4} = -1{,}5 \notin [-1; 1]$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\cdot(-2)} = \frac{1-5}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$

$\sin x = 1$

Простые решения: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

г) $4\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

Из основного тригонометрического тождества следует, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$4(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$

$4 - 4\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$-4\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$

Введем замену переменной: $\cos x = t$

$-4t^2 - t + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 3 = 1 + 48 = 49$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\cdot(-4)} = \frac{1+7}{-8} = -\frac{8}{8} = -1$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\cdot(-4)} = \frac{1-7}{-8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$\cos x = -1$

Простые решения: $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = -\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4} < 0, x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$

$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z$

д) $\operatorname{tg}^2 x = 2$

$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < 0, x = -\operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} > 0, x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = \operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n, n \in Z$

е) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$

Введем замену переменной: $\operatorname{tg} x = t$

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

$\operatorname{tg} x = 1$

$1 > 0, x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x = -4$

$-4 < 0, x = -\operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in Z$

ж) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \quad |: \cos x$

$\frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

$\sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 0$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$-\sqrt{3} < 0, x = -\operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

з) $\sin x = 2\cos x \quad |: \cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos x}{\cos x}$

$\operatorname{tg} x = 2$

$2 > 0, x = \operatorname{arctg} a + \pi n$

$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 8 Решение тригонометрических уравнений и неравенств № 3.

Тема 6.4. Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цель: Познакомиться с формулами для решения тригонометрических неравенств. Научиться применять алгоритмы решения тригонометрических неравенств.

Алгоритм решения тригонометрических неравенств:

$$\sin x < a$$

a	Множество решений
$-1 < a \le 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n\,, n \in Z$
$a > 1$	R
$a \le -1$	$\varnothing$

$$\sin x > a$$

a	Множество решений
$-1 < a \le 1$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n\,, n \in Z$
$a < -1$	R
$a \ge 1$	$\varnothing$

$$\cos x < a$$

a	Множество решений
$-1 < a \le 1$	$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arcsin a + 2\pi n\,, n \in Z$
$a > 1$	R
$a \le -1$	$\varnothing$

$$\cos x > a$$

a	Множество решений
$-1 < a \le 1$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n\,, n \in Z$
$a < -1$	R
$a \ge 1$	$\varnothing$

$$\operatorname{tg} x < a$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < arctg\ a + \pi n\,, n \in Z}$$

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$\boxed{arctg\ a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z}$$

$$\operatorname{ctg} x < a$$

$$\boxed{arcctg\ a + \pi n < x < \pi + \pi n\,, n \in Z}$$

$$\operatorname{ctg} x > a$$

$$\boxed{\pi n < x < arcctg\ a + \pi n\,, n \in Z}$$

Пример 1: Решить неравенство:

а) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x > a, \quad -1 < a \leq 1$

$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n < x < \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n\ , n \in Z$

б) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x > a, \quad -1 < a \leq 1$

$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n < x < \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\ , n \in Z$

в) $\sin x > \frac{1}{2}$

$\sin x > a, \quad -1 < a \leq 1$

$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n\ , n \in Z$

$\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n < x < \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n\ , n \in Z$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n\ , n \in Z$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\ , n \in Z$

г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x < a, \quad -1 < a \leq 1$

$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n < x < \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n < x < \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n\ , n \in Z$

$-\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\ , n \in Z$

$\frac{-3\pi}{4} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\ , n \in Z$

д) $\cos x \leq \sqrt{3}$

$\cos x < a, \quad \sqrt{3} > 1$

$x \in R$

е) $\cos x \geq 1$

$\cos x > a, \quad a \geq 1$

$x \in \varnothing$

ж) $\sin x \geq -\sqrt{2}$

$\sin x > a, \quad a < -1$

$x \in R$

з) $\sin x \leq 1$

$\sin x < a, \quad a \leq -1$

$x \in \varnothing$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 8 Решение тригонометрических уравнений и неравенств № 4.

Тема 6.5. Область определения, множество значений, четность и нечетность тригонометрических функций.

Цель: Познакомиться с понятиями области определения, множества значений, четности и нечетности тригонометрических функций. Научиться находить область определения и множество значений тригонометрических функций, определять является ли функция четной (нечетной).

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям.

Тригонометрическим функциям присуще понятие периодичности (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода –T).

Свойства функции синус $y = \sin x$:

Областью определения $x \in (-\infty; \infty)$.

Область значений есть $y \in [-1; 1]$.

Периодическая $T = 2\pi$.

Функция синус – нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

Свойства функции косинус $y = \cos x$:

Областью определения $x \in (-\infty; \infty)$.

Область значений есть $y \in [-1; 1]$.

Периодическая $T = 2\pi$.

Функция косинус – четная, так как $y(-x) = y(x)$.

Свойства функции тангенс $y = \operatorname{tg} x$:

Область определения функции $x \in (-\infty; \infty)$, кроме $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Область значений $y \in (-\infty; \infty)$.

Периодическая $T = \pi$.

Функция тангенс – нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

Пример 1: Найти область определения функции:

На область определения функции могут накладываться ограничения:

1) подкоренное выражение корня четной степени больше или равно нулю;

2) знаменатель не равен нулю;

3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля.

а) $y = \sin 2x$

ограничений нет

$D(y)$: $(-\infty; \infty)$

б) $y = \cos\frac{1}{x}$

ограничение 2), т.е. $x \neq 0$

$D(y)$: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

в) $y = \sin\sqrt{x}$

ограничение 1), т.е. $x \geq 0$

$D(y)$: $[0; \infty)$

г) $y = \frac{1}{\cos x}$

ограничение 2), т.е. $\cos x \neq 0$

Простые решения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$D(y)$: $(-\infty; \infty)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

д) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}$

ограничение 2), т.е. $\cos\frac{x}{3} \neq 0$

Простые решения: $\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$

$D(y)$: $(-\infty; \infty)$, $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z$

Пример 2: Найти множество значений функции:

а) $y = 1 + \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1 \ | + 1$

$-1 + 1 \leq 1 + \sin x \leq 1 + 1$

$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$

$E(y)$: $[0; 2]$

б) $y = 2\sin x + 3$

$-1 \leq \sin x \leq 1 \ | \cdot 2$

$-2 \leq 2\sin x \leq 2 \ | + 3$

$-2 + 3 \leq 2\sin x + 3 \leq 2 + 3$

$1 \leq 1 + \sin x \leq 5$

$E(y)$: $[1; 5]$

в) $y = \sin 2x \cdot \cos 2x + 2$

Воспользуемся формулой двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x + 2 = \frac{1}{2}\sin 4x + 2$

$-1 \leq \sin 4x \leq 1 \ | \cdot \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin 4x \leq \frac{1}{2} \ \Big| + 2$

$-\frac{1}{2} + 2 \leq \frac{1}{2}\sin 4x + 2 \leq \frac{1}{2} + 2$

$1{,}5 \leq \frac{1}{2}\sin 4x + 2 \leq 2{,}5$

$E(y)$: $[1{,}5; 2{,}5]$

Пример 3: Выяснить, является ли функция четной (нечетной):

Если $y(-x) = y(x)$, то функция четная, если $y(-x) = -y(x)$, то функция нечетная, в остальных случаях – функция общего вида.

а) $y = \cos 3x$

Напомним, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$y(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = y(x)$,

функция четная

б) $y = x \cdot \sin x$

Напомним, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$y(-x) = -x \cdot \sin(-x) = x \cdot \sin x = y(x)$

функция четная

в) $y = \frac{x}{2} \cdot \text{tg}^2\, x$

$y(-x) = -\frac{x}{2} \cdot \text{tg}^2\,(-x) = -\frac{x}{2} \cdot \text{tg}^2\, x = -y(x)$, функция нечетная

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 9 Построение графиков тригонометрических функций № 1-3.

Тема 6.6. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$, их свойства и графики.

Цель: Познакомиться с понятиями тригонометрических функций. Научиться строить графики тригонометрических функций и использовать их свойства, определять является ли функция возрастающей (убывающей), положительной (отрицательной) на промежутке.

Функция синус, её называют «синусоида».

Свойства функции синус $y = \sin x$:

Функция обращается в ноль при $x = \pi n, n \in Z$.

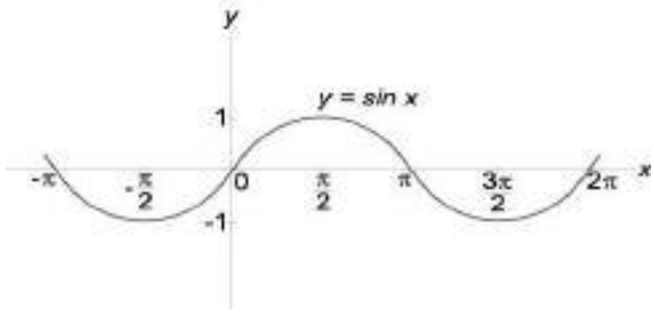
Наибольшее значение, равное 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Наименьшее значение, равное -1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Функция принимает положительные значения на интервале $(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in Z$.

Функция принимает отрицательные значения на интервале $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in Z$.

Функция убывает при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.



Функция косинус $y = \cos x$, её называют «косинусоида».

Свойства функции косинус $y = \cos x$:

Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Наибольшее значение, равное 1 при $x = 2\pi n, n \in Z$

Наименьшее значение, равное -1 при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

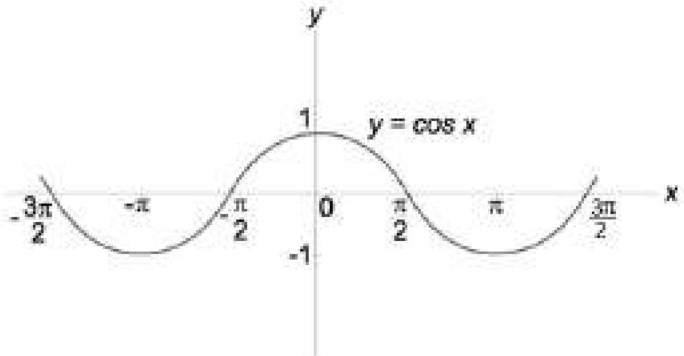
Функция принимает положительные значения на интервале

$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n \in Z.$

Функция принимает отрицательные значения на интервале

$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right), n \in Z.$

Функция убывает при $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$, возрастает при $x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in Z$.



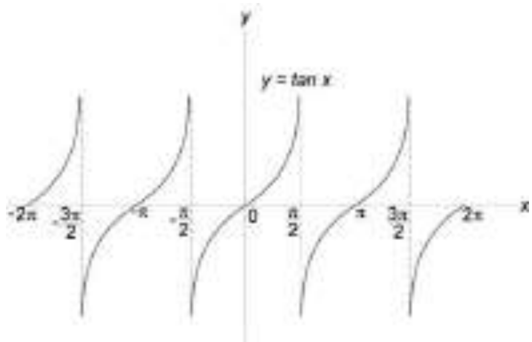
Функция тангенс $y = \text{tg}\, x$, его называют «тангенсоида».

Свойства функции тангенс $y = \text{tg}\, x$:

Функция обращается в ноль при $x = \pi n, n \in Z$.

Функция принимает положительные значения на интервале $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in Z.$

Функция принимает отрицательные значения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right), n \in Z.$



Функция возрастает при

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z.$

Пример 1: Возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на промежутке:

а) $[3\pi; 4\pi], \uparrow$ б) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right], \downarrow$ в) $[1; 3], \downarrow \left(\frac{1\cdot\pi}{3{,}14} = 0{,}3\pi;\ \frac{3\cdot\pi}{3{,}14} = 0{,}9\pi\right)$

Пример 2: Возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:

а) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right], \uparrow$ б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right], \downarrow$ в) $[2; 4], \downarrow \left(\frac{2\cdot\pi}{3{,}14} = 0{,}6\pi;\ \frac{4\cdot\pi}{3{,}14} = 1{,}2\pi\right)$

Пример 3: Возрастает или убывает функция $y = \text{tg}\, x$ на промежутке:

$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right], \uparrow$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 9 Построение графиков тригонометрических функций № 4-7.

Тема 7.1. Правило произведения.

Цель: Познакомиться с понятиями комбинаторики. Научиться решать комбинаторные задачи методом перебора, по правилу умножения.

Правило произведения.

Пусть объект A можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами. Тогда выбор пары (A, B) можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Правило суммы.

Пусть некоторый объект A можно выбрать n различными способами, а другой объект B можно выбрать m способами. Тогда существует $n + m$ способов выбрать либо объект A, либо объект B.

Пример №1: На вопросы типа «Сколько всего трехзначных чисел, в которых ровно две цифры — девятки» дает ответ комбинаторика.

Для ответа на исходный вопрос несложно понять, что следует разделить два случая: когда первая цифра — 9 и когда не 9. Все первые числа будут обязательно отличаться от всех вторых, поэтому количество вариантов можно будет просто сложить.

9x9, 99x — два варианта расстановки девяток, по 9 вариантов цифры в каждом (всего 18).

x99 — всего 8 вариантов, т. к. x — не 9 и не 0.

Ответ: 26 чисел.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 10 Комбинаторика № 1-15.

Тема 7.2. Перестановки, сочетания.

Цель: Научиться решать комбинаторные задачи с помощью перестановок и сочетаний, упрощать выражения, решать уравнения, используя перестановки и сочетания.

Перестановки.

Пусть имеется n различных объектов. Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются перестановками, а их число равно: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.Символ $n!$ называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1до n . По определению, считают, что $0! = 1$, $1! = 1$.

Сочетания.

Пусть имеется nразличных объектов. Будем выбирать из них mобъектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются сочетаниями из n объектов по m, а их число равно: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

Пример №1: Возьмем 3 фрукта: яблоко, грушу и банан.

а) Сколькими способами их можно переставить?

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

б) Сколькими способами можно выбрать два фрукта?

$\mathrm{C}_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3$

Пример №2: Проверьте равенство $C_{14}^9 + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$.

Чтобы найти значения C_{14}^9,C_{14}^{10}, C_{15}^{10} воспользуемся формулой

$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$, получим:

$$C_{14}^9 = \frac{14!}{(14-9)! \cdot 9!} = \frac{14!}{5! \cdot 9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9!} = 11 \cdot 13 \cdot 14 = 2002$$

$$C_{14}^{10} = \frac{14!}{(14-10)! \cdot 10!} = \frac{14!}{4! \cdot 10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10!} = 11 \cdot 13 \cdot 7 = 1001$$

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)! \cdot 10!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10!} = 11 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 = 3003$$

Подставим получившиеся результаты и проверим выполнение равенства:

$C_{14}^{9} + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$

$2002 + 1001 = 3003$

Условие равенства выполнены.

Ответ: равенство верное.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 10 Комбинаторика № 16-24, 31-42.

Тема 7.3. Размещения.

Цель: Научиться решать комбинаторные задачи с помощью размещений, упрощать выражения, решать уравнения, используя размещения.

Размещения.

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать из них mобъектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются размещениями из n объектов по m, а их число равно:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Пример №1: Возьмем 3 фрукта: яблоко, грушу и банан. Сколькими способами можно раздать по одному фрукту Даше и Наташе?

Для того чтобы раздать два фрукта, сначала нужно их выбрать. Согласно Примеру №1 б) предыдущей темы, сделать это можно $C_3^2 = 3$ способами.

Но комбинаций сейчас будет в два раза больше. Рассмотрим, например, первую пару фруктов: яблоком можно угостить Дашу, а грушей – Наташу; либо наоборот – груша достанется Даше, а яблоко – Наташе.

И такая перестановка возможна для каждой пары фруктов. Она отличается от формулы C_3^2 тем, что учитывает не только количество способов, которым можно выбрать несколько объектов, но и все перестановки объектов в каждой возможной выборке. Так, в рассмотренном примере, важно не только то, что можно просто выбрать, например, грушу и банан, но и то, как они будут распределены (размещены) между Дашей и Наташей.

Тогда количество комбинаций равно: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 10 Комбинаторика № 25-30.

Тема 8.1. События. Комбинации событий. Противоположное событие.

Цель: Познакомиться с определениями события, комбинации событий, противоположных событий. Рассмотреть примеры вычисления вероятностей, научиться находить комбинации событий.

Все, что происходит в реальной действительности, называют явлениями или событиями.

Событие называется случайным, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти. Случайным будет, например, событие «При подбрасывании игрального кубика выпадет 6 очков».

До эксперимента, как правило, невозможно точно сказать, произойдет данное событие, или не произойдет – это выясняется лишь после его завершения.

Случайное событие может быть: невозможным, т.е. никогда не произойти или достоверным, т.е. произойти при каждом эксперименте.

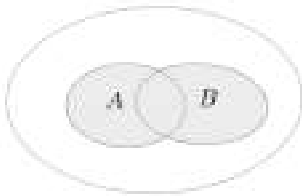
События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются равновозможными, если у каждого из событий равные шансы на появление в эксперименте (В урне два шара – белый и черный, появление черного шара не исключает появление белого при том же испытании).

События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

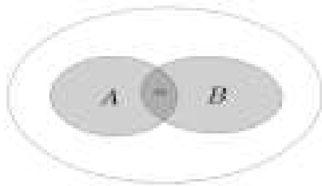
Случайные события (большими буквами латинского алфавита): $A, B, C, D, \dots$ (или $A_1, A_2, A_3, \dots A_m$). «Случайные» опускают и говорят просто «события». Число исходов, благоприятствующих наступлению данного события – m, число всех исходов (опытов) – n.

Суммой (объединением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и Bобозначают $A + B$ (или $A \cup B$). На рисунке с помощью кругов Эйлера



проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — $A + B$ событие.

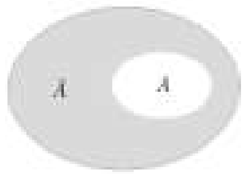
Произведением (пересечением) событий A и Bназывается событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают $A \cdot B$ (или $A \cap B$).Рисунок иллюстрирует с помощью кругов



Эйлера произведение событий A и B: темнее закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие $A \cdot B$.

События A и B называют равными (равносильными) и обозначают $A = B$, если событие Aпроисходит тогда и только тогда, когда происходит событие B. Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, событие B— выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Событие $\overline{A}$ называют противоположным событию A, если событие $\bar{A}$происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. На рисунке проиллюстрирована



взаимосвязь событий A и $\bar{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\bar{A}$ изображено закрашенной областью).

Пример №1: Событие «На игральном кубике выпадет 7 очков» - невозможное, а «На игральном кубике выпадет меньше семи очков» - достоверное. Разумеется, если речь идет о кубике, на гранях которого написаны числа от 1 до 6.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 11 Элементы теории вероятностей № 1-9.

Тема 8.2. Вероятность события. Сложение вероятностей.

Цель: Познакомиться с понятиями теории вероятностей. Изучить классическое определение вероятности, свойств вероятности, теоремы о сумме вероятностей. Решение задач на вычисление вероятностей событий.

Классическое определение вероятности. Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$ – вероятность случайного события.

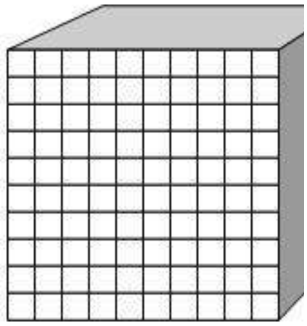
Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$. Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному – вероятность $P(A) = 1$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, где $A \cdot B$ – произведение событий A и B.

Пример №1: Деревянный кубик с окрашенными гранями и надписью «бюджет» (по одной букве на грани) распиливается на 1000 равных кубиков, из которых наугад выбирается один. Какова вероятность того, что он будет иметь две окрашенные грани?



Маленькие кубики с двумя окрашенными гранями находились до распила при ребрах куба (но не угловые). Количество маленьких кубиков $n = 1000$, тогда длина ребра исходного куба в $\sqrt[3]{1000} = 10$ раз больше длины ребра маленького кубика.

Отсюда, маленьких не угловых кубиков с двумя окрашенными гранями $10 - 2 = 8$. Так как всего у куба 12 ребер, всего количество благоприятных исходов (кубиков с двумя окрашенными гранями) $m = 12 \cdot 8 = 96$, а всего исходов $n = 1000$. Вероятность случайного события по классическому определению вероятности: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{96}{1000} = 0{,}096$.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 11 Элементы теории вероятностей № 10-21.

Тема 8.3. Независимые события. Умножение вероятностей.

Цель: Научиться определять являются ли события независимыми, решать задачи на вычисление произведения вероятностей.

Два события называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого, в случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие Bпроизошло. Аналогично через $P(B/A)$ обозначается условная вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$ или $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Следствие. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и Bравна произведению вероятностей этих событий:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример №1: Выяснить, являются ли события А и В независимыми, если:

$P(A) = \frac{5}{13}, P(B) = \frac{8}{13}, P(AB) = \frac{39}{169}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{40}{169}$; $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ – не являются.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 11 Элементы теории вероятностей № 22-28.

Тема 8.4. Статистическая вероятность.

Цель: Ознакомиться с представлением числовых данных и их характеристиками, решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик.

Если в N независимых опытах событие A осуществляется M раз, то M называется абсолютной частотой события A, а соотношение $\frac{M}{N}$ называется относительной частотой события A.

$$\text{Относительная частота события} = \frac{\text{количество осуществления события}}{\text{количество экспериментов}}$$

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению $W(A) = \frac{M}{N}$.

Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654 — 1705) обосновал так называемый закон больших чисел:

Пример №1: Проведём эксперимент:

1) бросить игровой кубик 200 раз и каждый раз записывать количество выпавших пунктов;

2) сосчитать, в скольких случаях выпало 4 пункта. Допустим, что после подсчётов результат 4 был 32 раза. Что можно вычислить?

В наших экспериментах событие A — выпали 4 пункта. Значит, по определению:

1) абсолютная частота события A равна 32;

2) относительная частота события $A = \frac{32}{200} = \frac{4}{25}$.

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний. В нашем эксперименте относительная частота события $A = \frac{4}{25}$ или статистическая вероятность $P(A) \approx \frac{4}{25}$.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 11 Элементы теории вероятностей № 29-31.

Тема 9.1. Производная.

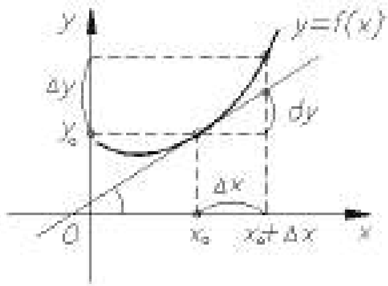
Цель: Познакомиться с определением производной. Изучение алгоритма вычисления производной на примере вычисления мгновенной скорости.

Производная функции − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Обратная операция − восстановление функции по известной производной – называется интегрированием.

Производная функции в некоторой точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Оценку скорости изменения можно получить, вычислив отношение изменения функции Δy к соответствующему изменению аргумента Δx.

В определении производной такое отношение рассматривается в пределе при условии $\Delta x \to 0$. Перейдем к более строгой формулировке: приращением аргумента называется разность между двумя значениями аргумента: «новым» и «старым».



Обычно обозначается как $\Delta x = x - x_0$.

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$, называется величина:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной $y^/(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть: $y^/(x_0) = f^/(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ или $y^/(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$

Производная линейной функции $y^/ = (kx + b)^/ = k$.

Пример №1: Найти производную, если:

а) $s(t) = 1 + 3t$, от $t = 1$ до $t = 4$

$\Delta t = 4 - 1 = 3$

$\Delta s = s(1 + 3) - s(1) = s(4) - s(1) = 1 + 3 \cdot 4 - (1 + 3 \cdot 1) =$

$= 1 + 12 - 1 - 3 = 9$

$s^/(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{9}{3} = 3$

б) $s(t) = 2t$, $t \in [1; 1{,}2]$

$\Delta t = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$

$\Delta s = s(1 + 0{,}2) - s(1) = s(1{,}2) - s(1) = 2 \cdot 1{,}2 - 2 \cdot 1 = 2{,}4 - 2 = 0{,}4$

$s^/(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2$

в) $s(t) = 2t + 1$

Δt

$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 2(t_0 + \Delta t) + 1 - (2t_0 + 1) =$

$= 2t_0 + 2\Delta t + 1 - 2t_0 - 1 = 2\Delta t$

$s^/(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t}{\Delta t} = 2$

г) $f(x) = 3x + 2$

Δx

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x) + 2 - (3x_0 + 2) =$

$= 3x_0 + 3\Delta x + 2 - 3x_0 - 2 = 3\Delta x$

$f^/(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$

д) $f(x) = 3x^2 - 5x$

Δx

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 5(x_0 + \Delta x) - (3x_0^2 - 5x_0) =$

$= 3(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2) - 5x_0 - 5\Delta x - 3x_0^2 + 5x_0 =$

$= 3x_0^2 + 6x_0 \cdot \Delta x + 3\Delta x^2 - 5\Delta x - 3x_0^2 = 6x_0 \cdot \Delta x + 3\Delta x^2 - 5\Delta x$

$f^/(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{6x_0 \cdot \Delta x + 3\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x_0 + 3\Delta x - 5)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 6x_0 + 3\Delta x - 5 =$

$= 6x_0 - 5$

Пример №2: С помощью формулы $y^/ = (kx + b)^/ = k$ найти производную:

а) $f(x) = 4x$ $\quad f^/(x) = 4$

б) $f(x) = -7x + 5$ $\quad f^/(x) = -7$

в) $f(x) = -5x - 7$ $\quad f^/(x) = -5$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №12 Вычисление производной функции № 1-5.

Тема 9.2. Производные основных элементарных функций.

Цель: Научиться находить производную степенных, элементарных функций, пользоваться таблицей производных элементарных функций.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(C)^{/} = 0$ (C-любое число)	8. $(\log_a x)^{/} = \frac{1}{x\ln a}$	15. $(\operatorname{arctg} x)^{/} = \frac{1}{1+x^2}$
2. $(x)^{/} = 1$	9. $(\sin x)^{/} = \cos x$	16. $(\operatorname{arcctg} x)^{/} = -\frac{1}{1+x^2}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10. $(\cos x)^{/} = -\sin x$	17. $(\operatorname{sh} x)^{/} = \operatorname{ch} x$
4. $(x^{\alpha})^{/} = \alpha x^{\alpha-1}$ (α-любое число)	11. $(tg\ x)^{/} = \frac{1}{cos^2 x}$	18. $(\operatorname{ch} x)^{/} = \operatorname{sh} x$
5. $(e^x)^{/} = e^x$	12. $(ctg\ x)^{/} = -\frac{1}{sin^2 x}$	19. $(\operatorname{th} x)^{/} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
6. $(a^x)^{/} = a^x \ln a$ (a-любое число)	13. $(\arcsin x)^{/} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20. $(\operatorname{cth} x)^{/} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
7. $(\ln x)^{/} = \frac{1}{x}$	14. $(\arccos x)^{/} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Пример №1: Найти производную:

а) $(x^6)^{/} = 6x^5$

б) $(x^{-2})^{/} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

в) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{/} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

г) $\left(\frac{1}{x^5}\right)^{/} = (x^{-5})^{/} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

д) $((4x-3)^2)^{/} = 2(4x-3)\cdot 4 = 8(4x-3)$

е) $\left(\sqrt[3]{2x+7}\right)^{/} = \left((2x+7)^{\frac{1}{3}}\right)^{/} = \frac{1}{3}(2x+7)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+7)^2}}$

ж) $(x^2+x)^{/} = 2x+1$

з) $(3x^2-5x+5)^{/} = 6x-5$

и) $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{/} = (x^2+x^{-3})^{/} = 2x-3x^{-4} = 2x-\frac{3}{x^4}$

Пример №2: Найти $f^{/}(x_0)$, если:

а) $f(x) = x^6,\ x_0 = \frac{1}{2}$

$f^{/}(x) = (x^6)^{/} = 6x^5$

$f^{/}\left(\frac{1}{2}\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6\cdot\frac{1}{32} = \frac{3}{16}$

б) $f(x) = x^2-2x+1,\ f^{/}(0)$ и $f^{/}(2)$

$f^{/}(x) = (x^2-2x+1)^{/} = 2x-2$

$f^{/}(0) = 2\cdot 0 - 2 = -2$

$f^{/}(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2$

в) $f(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2},\ f^{/}(3)$ и $f^{/}(1)$

$f^{/}(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{/} = (x^{-1}+x^{-2})^{/} = -x^{-2}-2x^{-3} = -\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$

$f^{/}(3) = -\frac{1}{3^2}-\frac{2}{3^3} = -\frac{1}{9}-\frac{2}{27} = \frac{-9-6}{81} = -\frac{15}{81} = -\frac{5}{27}$

$f^{/}(1) = -\frac{1}{1^2}-\frac{2}{1^3} = -1-2 = -3$

Пример №3: Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = 0$, если: $f(x) = x^3-2x$

$f^{/}(x) = (x^3 - 2x)^{/} = 3x^2 - 2$

$3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2$

$x^2 = \frac{2}{3}$

$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Пример №4: Дифференцируема ли функция $y = f(x)$ в точке x , если:

$y = \frac{2}{x-1}, x = 1$

ОДЗ:

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$D(y)$: $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$. Точка $x = 1 \notin D(y) \Rightarrow$ функция в данной точке не дифференцируема.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №12 Вычисление производной функции № 6-12.

Тема 9.3. Производные сложных функций.

Цель: Научиться находить производную сложных функций.

Производная сложной функции равна производной внешней функции умноженной на производную внутренней функции: $\left(u\left(v(x)\right)\right)^{/} = u^{/}(v) \cdot v^{/}(x)$.

Пример №1: Найти производную:

а) $(e^x + 1)^{/} = e^x$

б) $(e^{2x+1} + 2x^3)^{/} = 2e^{2x+1} + 6x^2$

в) $(2^x + e^x)^{/} = 2^x \ln 2 + e^x$

г) $(0{,}5^x + e^{3x})^{/} = 0{,}5^x \ln 0{,}5 + 3e^{3x}$

д) $(2\ln x + 3^x)^{/} = \frac{2}{x} + 3^x \ln 3$

е) $(\sin x + x^2)^{/} = \cos x + 2x$

ж) $(\sin(2x - 1))^{/} = 2\cos(2x - 1)$

з) $\left(\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + e^{3x}\right)^{/} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 3e^{3x}$

Пример №2: Найти $f^{/}(x_0)$, если: $f(x) = e^{2x-4} + 2\ln x,\ x_0 = 2$.

$f^{/}(x) = (e^{2x-4} + 2\ln x)^{/} = 2e^{2x-4} + \frac{2}{x}$

$f^{/}(2) = 2e^{2\cdot 2-4} + \frac{2}{2} = 2e^0 + 1 = 2 + 1 = 3$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №12 Вычисление производной функции № 17-18.

Тема 9.4. Правила дифференцирования.

Цель: Знать правила дифференцирования и уметь ими пользоваться для нахождения производных.

Правила дифференцирования функций.

Правило	Формула
1. Постоянный множитель с можно выносить за знак производной.	$\left(c \cdot u(x)\right)^{/} = c \cdot u^{/}(x)$
2. Если существуют производные $u^{/}(x)$ и $v^{/}(x)$, то производная от суммы (разности) функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме (разности) производных.	$\left(u(x) \pm v(x)\right)^{/} = u^{/}(x) \pm v^{/}(x)$
3. Если существуют производные $u^{/}(x)$ и $v^{/}(x)$, то выполняются следующие правила дифференцирования произведения функций и частного от их деления:	$\left(u(x) \cdot v(x)\right)^{/} =$ $= u^{/}(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v^{/}(x)$ $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^{/} = \frac{u^{/}(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v^{/}(x)}{v^2(x)}$, где $v(x) \neq 0$.

Пример №1: Найти производную функции:

а) $\left((x^2 - x) \cdot (x^3 + x)\right)^{/} = (x^2 - x)^{/} \cdot (x^3 + x) + (x^2 - x) \cdot (x^3 + x)^{/} =$

$= (2x - 1) \cdot (x^3 + x) + (x^2 - x) \cdot (3x^2 + 1)$

б) $\left(\frac{x^5+x^3+x}{x+1}\right)^{/} = \frac{\left(x^5+x^3+x\right)^{/}\cdot(x+1)+\left(x^5+x^3+x\right)\cdot(x+1)^{/}}{(x+1)^2} =$

$= \frac{(5x^4+3x^2+1)\cdot(x+1)+\left(x^5+x^3+x\right)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{(5x^4+3x^2+1)\cdot(x+1)+\left(x^5+x^3+x\right)}{(x+1)^2}$

в) $\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)^{/} = \frac{(\cos x)^{/}\cdot e^x+\cos x\cdot(e^x)^{/}}{e^{2x}} = \frac{-\sin x\cdot e^x+\cos x\cdot e^x}{e^{2x}}$

Пример №2: Найти $f^{/}(1)$, если:

а) $f(x) = ((x-1)^8 \cdot (2-x)^7)^{/} =$

$= ((x-1)^8)^{/} \cdot (2-x)^7 + (x-1)^8 \cdot ((2-x)^7)^{/} =$

$= 8(x-1)^7 \cdot 1 \cdot (2-x)^7 + (x-1)^8 \cdot 7(2-x)^6 \cdot (-1) =$

$= 8(x-1)^7(2-x)^7 - 7(x-1)^8(2-x)^6$

$f^{/}(1) = 8(1-1)^7(2-1)^7 - 7(1-1)^8(2-1)^6 = 8 \cdot 0 \cdot 1 - 7 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

б) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^/ = \frac{(x^2-1)^/\cdot(x^2-1)+(x^2-1)\cdot(x^2+1)^/}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot(x^2+1)+(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$f^/(1) = \frac{2\cdot1\cdot(1^2+1)+(1^2-1)\cdot2\cdot1}{(1^2+1)^2} = \frac{2\cdot1\cdot2+0\cdot2\cdot1}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №12 Вычисление производной функции № 13-16.

Тема 9.5. Производная: её геометрический и физический смысл.

Цель: Познакомиться с понятиями геометрического и физического смысла производной. Научиться вычислять угловой коэффициент касательной и составлять ее уравнение.

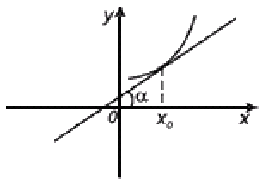
Геометрический смысл производной.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0, равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке:

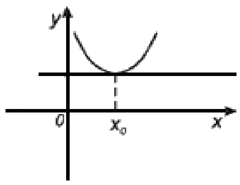
$$f^/(x) = tg\,\alpha = k.$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

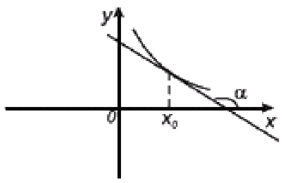
$$y = f(x_0) + f^/(x_0)(x - x_0).$$



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

Пример №1: Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}, x_0 = 2, y_0 = -3$

$tg\,\alpha = k$

$k = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$

$y = kx + b$

$1 \cdot 2 + b = -3$

$b = -3 - 5 = -5$

б) $\alpha = -\frac{\pi}{3}, x_0 = 1, y_0 = 1$

$tg\,\alpha = k$

$k = tg\,\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\,\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$y = kx + b$

$-\sqrt{3} \cdot 1 + b = 1$

$b = 1 + \sqrt{3}$

Пример №2: Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^3, x_0 = 1$

$f^/(x) = k$

$f^/(x) = (x^3)^/ = 3x^2$

$k = f^/(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

б) $f(x) = \ln x\,, x_0 = 1$

$f^/(x) = k$

$f^/(x) = (\ln x)^/ = \frac{1}{x}$

$k = f^/(1) = \frac{1}{1} = 1$

Пример №3: Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3, x_0 = 1$

$f^/(x) = tg\ \alpha$

$f^/(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)^/ = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

$tg\ \alpha = f^/(1) = 1^2 = 1$

$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

б) $f(x) = 2\sqrt{x}, x_0 = 3$

$f^/(x) = tg\ \alpha$

$f^/(x) = \left(2\sqrt{x}\right)^/ = \left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^/ = 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$tg\ \alpha = f^/(3) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

Пример №4: Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad x_0 = 1.$

$y = f(x_0) + f^/(x_0)(x - x_0)$

$y(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$y^/ = (x^2 + x + 1)^/ = 2x + 1$,

$y^/(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Подставим полученные данные в формулу:

$y = 3 + 3(x - 1)$

$y = 3 + 3x - 3$

$y = 3x$ - уравнение касательной

б) $f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x_0 = 3.$

$y = f(x_0) + f^/(x_0)(x - x_0)$

$y(3) = \frac{1}{3}$

$y^{/} = \left(\frac{1}{x}\right)^{/} = (x^{-1})^{/} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$,

$y^{/}(3) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$

Подставим полученные данные в формулу:

$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 3)$

$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$

$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{9}x$ - уравнение касательной

в) $f(x) = \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$.

$y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y^{/} = (\sin x)^{/} = \cos x$,

$y^{/}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Подставим полученные данные в формулу:

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ - уравнение касательной

г) $f(x) = \ln x \quad x_0 = 1$.

$y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$

$y(1) = \ln 1 = 0$

$y^{/} = (\ln x)^{/} = \frac{1}{x}$,

$y^{/}(1) = \frac{1}{1} = 1$

Подставим полученные данные в формулу:

$y = 0 + 1(x - 1)$

$y = x - 1$ - уравнение касательной

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 13 Исследование функции № 1-4.

Тема 9.6. Нахождение точек экстремума функции, промежутков возрастания и убывания с помощью производной.

Цель: Научиться применять производную для решения задач на нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремумов функций, промежутков возрастания и убывания с помощью производной.

1) Возрастание и убывание функции

Если $y^{/}(x) > 0$, то функция возрастает, если $y^{/}(x) < 0$, то функция убывает.

2) Экстремумы функции

Точка x_0 называется точкой максимума функции $y(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $y(x) < y(x_0)$

Точка x_0 называется точкой минимума функции $y(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $y(x) > y(x_0)$

Пусть a- корень уравнения $y^{/}(x) = 0$.

Если при переходе через точку a, производная меняет знак с "-" на "+", то a - точка минимума функции.

Если при переходе через точку a, производная меняет знак с "+" на "-", то a - точка максимума функции.

3) Наибольшее и наименьшее значение функции

Правило: Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке. Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т.е. $y(a)$ и $y(b)$

2) найти значения функции в ее критических точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример №1: Найти промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = x^2 - x$

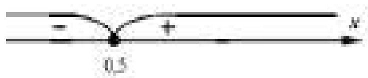
$y^{/} = (x^2 - x\ )^{/} = 2x - 1$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = 0{,}5$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



$-1 \in (-\infty; 0{,}5)$: $y^{/}(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$-1 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$1 \in (0{,}5; \infty)$: $y^{/}(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$1 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$y \uparrow$ при $x \in (0{,}5; \infty)$

$y \downarrow$ при $x \in (-\infty; 0{,}5)$

б) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$

$y^{/} = (2x^3 - 3x^2 - 36x + 40)^{/} = 6x^2 - 6x - 36$

$6x^2 - 6x - 36 = 0\ \ |: 6$

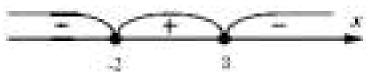
$x^2 - x - 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\cdot1} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\cdot1} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак производной:

$-3 \in (-\infty; -2)$: $y^{/}(-3) = (-3)^2 + 3 - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$

$6 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$0 \in (-2; 3)$: $y^{/}(0) = 0^2 - 0 - 6 = -6$

$-6 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$4 \in (3; \infty)$: $y^{/}(4) = 4^2 - 4 - 6 = 16 - 4 - 6 = 6$

$6 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$y \uparrow$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

$y \downarrow$ при $x \in (-2; 3)$

Пример №2: Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

$y = 2x^2 - 20x + 1$

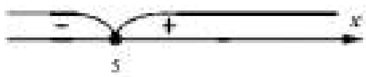
$y^{/} = (2x^2 - 20x + 1\ )^{/} = 4x - 20$

$4x - 20 = 0$

$4x = 20$

$x = 5$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



$-1 \in (-\infty; 5)$: $y^{/}(0) = 4 \cdot 0 - 20 = -20$

$-20 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$1 \in (5; \infty)$: $y^{/}(6) = 4 \cdot 6 - 20 = 24 - 20 = 4$

$4 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

При переходе через точку 5, производная меняет знак с "-" на "+", т.е. 5 - точка минимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(5) = 2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 1 = 50 - 100 + 1 = -49.$

$x_{min} = 5, y_{min} = -49.$

Пример №3: Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке $[-4; 3]$

$y^/ = (2x^3 + 3x^2 - 36x\,)^/ = 6x^2 + 6x - 36$

$6x^2 + 6x - 36 = 0 \;\; |: 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \in [-4; 3]$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \in [-4; 3]$

$f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) = -2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 + 108 = 81$

$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 72 = -44$

$f(-4) = 2 \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 36 \cdot (-4) = -2 \cdot 64 + 3 \cdot 16 + 144 = 64$

$f(3) = 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 9 - 108 = -27$

$f(-3)_{\text{наиб}} = 81$

$f(2)_{\text{наим}} = -44$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 13 Исследование функции № 5-9.

Тема 9.7. Применение производной к построению графиков функций.

Цель: Научиться проводить с помощью производной исследования функции, устанавливать связь свойств функции и производной по их графикам.

План исследования:

1) область определения

2) производная

3) стационарные точки

4) промежутки возрастания и убывания

5) точки экстремума и значение функции в них.

Пример №1: Построить график функции: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

1) область определения

$D(y): (-\infty; \infty)$

2) производная

$y^{/} = (x^3 - 3x^2 + 4)^{/} = 3x^2 - 6x$

3) стационарные точки

$3x^2 - 6x = 0 \ |: 3$

$x^2 - 2x = 0$

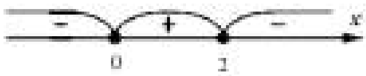
$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ или $x - 2 = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

4) промежутки возрастания и убывания

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак производной:

$-1 \in (-\infty; -1)$: $y^{/}(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$

$3 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$1 \in (0; 2)$: $y^{/}(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$-1 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$3 \in (2; \infty)$: $y^{/}(2) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$

$3 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$y \uparrow$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

$y \downarrow$ при $x \in (0; 2)$

5) точки экстремума и значение функции в них.

При переходе через точку 0, производная меняет знак с "+" на "-", т.е. 0 - точка максимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4.$

$x_{max} = 0, y_{max} = 4.$

При переходе через точку 2, производная меняет знак с "-" на "+", т.е. 2 - точка минимума функции.

Найдем значение функции в данной точке:

$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$

$x_{min} = 2, y_{min} = 2.$

Подведем итоги:

$D(y): (-\infty; \infty)$

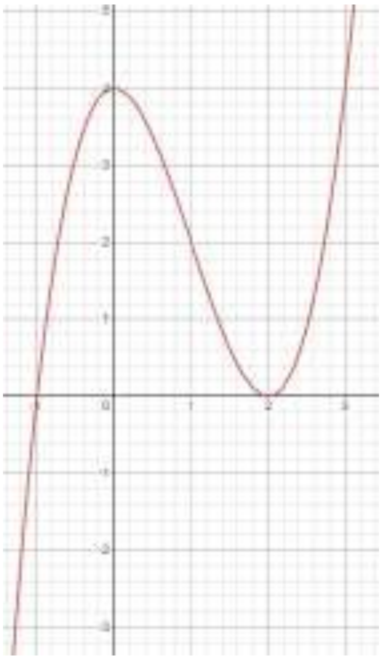
$y \uparrow$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

$y \downarrow$ при $x \in (3; \infty)$

$x_{max} = 0, y_{max} = 4$

$x_{min} = 2, y_{min} = 2$

Построим график.



Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 13 Исследование функции № 10.

Тема 9.8. Первообразная. Правила нахождения первообразных.

Цель: Познакомиться с понятием первообразной. Научиться решать задачи на связь первообразной и ее производной, вычислять первообразную для данной функции.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F^{/}(x) = f(x)$. Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределённого интеграла, а сам процесс называется интегрированием.

Таблица неопределенных интегралов.

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = f(x)$
$\int 1\, dx$	$x + C$
$\int x^{\alpha}\, dx$, где $\alpha \in N$, $\alpha \neq -1$, (α − число)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C$

$\int e^x\,dx$	$e^x + C$
$\int \sin x\,dx$	$-cos\,x + C$
$\int \cos x\,dx$	$sin\,x + C$
$\int \frac{1}{sin^2x}dx$	$-ctgx + C$
$\int \frac{1}{cos^2x}dx$	$tgx + C$
$\int (kx+b)^p\,dx$,где $p \neq -1$, $k \neq 0, (p, k -$ числа$)$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\int \frac{1}{(kx+b)}dx,$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$\frac{1}{k}ln(kx+b) + C$
$\int e^{kx+b}\,dx,$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$\frac{1}{k}e^{kx+b} + C$
$\int \sin(kx+b)\,dx$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$-\frac{1}{k}cos(kx+b) + C$
$\int \cos(kx+b)\,dx$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$\frac{1}{k}sin(kx+b) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$arcsinx\ +\ C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx$	$arctgx +\ C$
$\int a^x\,dx$,где $(a -$ число$)$	$\frac{a^x}{lna} + C$
$\int \mathrm{ch}\,x\,dx$	$\mathrm{sh}\,x + C$
$\int \mathrm{sh}\,x\,dx$	$\mathrm{ch}\,x + C$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2x}dx$	$\mathrm{th}\,x + C$
$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2x}dx$	$-\mathrm{cth}\,x + C$
$\int tgx\,dx$	$-ln\|cosx\| + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$, где $(a -$ число$)$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$, где $(a -$ число$)$	$\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}dx$, где $(a -$ число$)$	$\frac{1}{2}ln\|x^2 \pm a^2\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$, где $(a -$ число$)$	$ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} dx$, где ($a$ – число)	$arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$, где ($a$ – число)	$\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} dx$, где ($a$ – число)	$-\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, где ($a$ – число)	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$, где ($a$ – число)	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

Пример №1: Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$:

а) $F(x) = \frac{2}{x}, f(x) = -\frac{2}{x^2}$

$F^{/}(x) = f(x)$

$F^{/}(x) = (2 \cdot x^{-1})^{/} = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2} = f(x)$

б) $F(x) = 1 + \sqrt{x}, f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$F^{/}(x) = f(x)$

$F^{/}(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{/} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

Пример №2: Найти первообразную функции:

а) $f(x) = 2x^5 - 3x^2$

$F(x) = 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^6}{3} - x^3 + C$

б) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$

$F(x) = 2\ln x - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = 2\ln x + \frac{3}{x} + C$

в) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$

$F(x) = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$

г) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$

$F(x) = 3\sin x + 4\cos x + C$

д) $f(x) = e^x - 2\cos x$

$F(x) = e^x - 2\sin x + C$

е) $f(x) = 5 - e^{-x} + 3\cos x$

$F(x) = 5x + e^{-x} + 3\sin x + C$

ж) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x = 6 \cdot x^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3e^x$

$F(x) = 6 \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2\ln x + 3e^x + C = \frac{9\sqrt[3]{x^4}}{2} - 2\ln x + 3e^x + C$

з) $f(x) = (x+1)^4$

$F(x) = \frac{(x+1)^5}{5 \cdot 1} + C = \frac{(x+1)^5}{5} + C$

и) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}} = 2 \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot 1} + C = 4\sqrt{x-2} + C$

к) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$

$F(x) = \frac{\ln(x-1)}{1} + 4 \cdot \frac{\sin(x+2)}{1} + C = \ln(x-1) + 4\sin(x+2) + C$

л) $f(x) = \sin(2x+3)$

$F(x) = -\frac{\cos(2x+3)}{2} + C$

м) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

$F(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right)}{\frac{1}{2}} + C = 2\sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C$

н) $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} + C$

о) $f(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

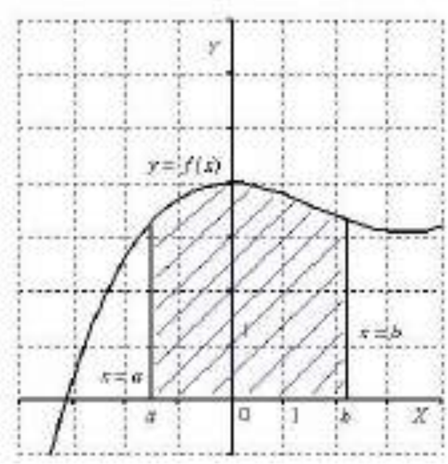
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1} + C = \frac{1}{2}\ln x + C$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 14 Нахождение первообразной функции и вычисление интегралов № 1-2.

Тема 9.9. Площадь криволинейной трапеции и интеграл.

Цель: Научиться применять интеграл для вычисления площадей с помощью формулы Ньютона— Лейбница.



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, находят по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b).$$

С точки зрения геометрии определенный интеграл – это площадь фигуры.

Пример №1: Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a, x = b$ осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

а) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$

$$S = \int_2^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4}|_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{256}{4} - \frac{16}{4} = 64 - 4 = 60$$

б) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)|_{-2}^1 = \frac{1^3}{3} + 1 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2\right) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 =$$

$$= \frac{9}{3} + 3 = 3 + 3 = 6$$

в) $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{2\pi}{3}, f(x) = \sin x$

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x \, dx = -\cos x \,|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = -\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 14 Нахождение первообразной функции и вычисление интегралов № 3.

Тема 9.10. Вычисление интегралов.

Цель: Закрепить навыки вычисления интегралов.

Пример №1: Вычислить интеграл:

а) $\int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^4}{2} = \frac{1}{2}$

б) $\int_{-1}^{2} 3x^2dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}|_{-1}^{2} = x^3|_{-1}^{2} = 2^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9$

в) $\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2}dx = \int_{2}^{3} x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}|_{2}^{3} = -\frac{1}{x}|_{2}^{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$

г) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\, dx = \int_{1}^{4} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_{1}^{4} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}|_{1}^{4} = \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3} = \frac{2\sqrt{64}}{3} - \frac{2\sqrt{1}}{3} =$

$= \frac{2\cdot4}{3} - \frac{2\cdot1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 14 Нахождение первообразной функции и вычисление интегралов № 4.

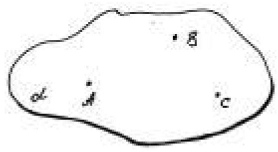
Тема 10.1. Аксиомы стереометрии и следствия из них.

Цель: Познакомиться с аксиомами стереометрии и следствиями из них. Использовать основные понятия и аксиомы стереометрии при решении стандартных задач логического характера, научиться изображать точки, прямые и плоскости на проекционном чертеже при различном их взаимном расположении в пространстве.

Стереометрия - раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства пространственных фигур. Простейшие фигуры в пространстве: точка, прямая, плоскость.

Аксиомы стереометрии и их следствия:

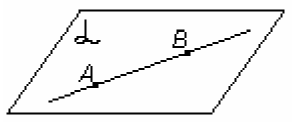
А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



$A, B, C \in \alpha$

(точки А, В, С лежат в плоскости α)

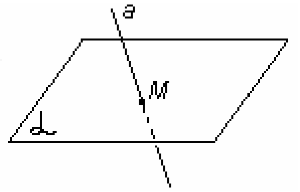
А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости



$$AB \subset \alpha$$

Прямая AB лежит в плоскости α

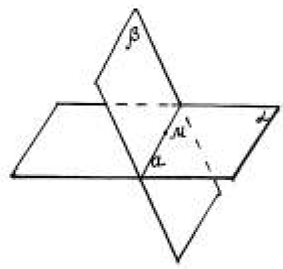
Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



$$a \cap \alpha = M$$

Прямая a и плоскость α пересекаются в точке M.

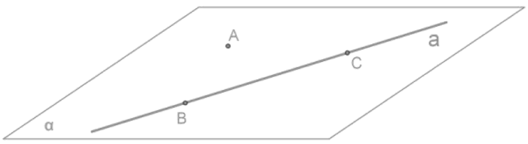
А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



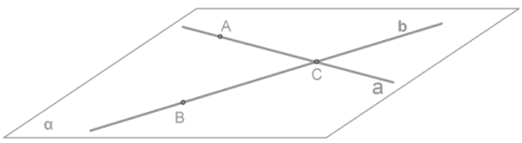
$$\alpha \cap \beta = a$$

α и β пересекаются по прямой a.

Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

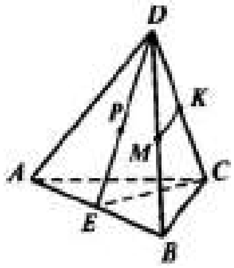


Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.



Пример №1: По рисунку назовите: а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC; б) точки пересечения прямой DK с плоскостью (ABC), прямой CE с плоскостью (ADB); в) точки, лежащие в плоскостях (ADB) и (DBC); г) прямые, по которым пересекаются плоскости (ABC) и (DCB), (ABD) и (CDA), (PDC) и (ABC).

а) $PE \subset (ADB)$, $MK \subset (BCD)$, $DB \subset (ADB),(CBD)$, $AB \subset (ABC),(ABD)$, $EC \subset (ABC)$.



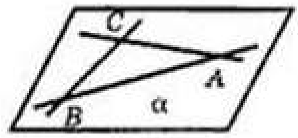
б) $DK \cap (ABC) = C$, $CE \cap (ADB) = E$.

в) $A, D, B, P, E, M \in (ADB)$, $D, B, C, M, K \in (DBC)$.

г) $(ABC) \cap (DCB) = BC$, $(ABD) \cap (CDA) = AD$,

$(PDC) \cap (ABC) = CE$.

Пример №2: Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.



Дано:

AB, BC, CA - отрезки

Доказать: $AB, BC, CA \subset \alpha$

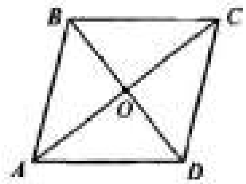
Доказательство: Через $A, B, C \in \alpha$, причем α - единственная (по А1).

$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$ (по А2).

$B, C \in \alpha \Rightarrow BC \subset \alpha$ (по А2).

$C, A \in \alpha \Rightarrow CA \subset \alpha$ (по А2).

Пример №3: Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α? Ответ обоснуйте.



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм

$A, B, O \in \alpha$

$AC \cap BD = O$

Доказать: $C, D \in \alpha$

Доказательство:

$$\left.\begin{matrix} A, O \in \alpha \Rightarrow AO \subset \alpha (\text{по А2}) \\ C \in AO \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \in \alpha$$

$$\left.\begin{matrix} B, O \in \alpha \Rightarrow BO \subset \alpha (\text{по А2}) \\ D \in BO \end{matrix}\right\} \Rightarrow D \in \alpha$$

Две другие вершины параллелограмма лежат в плоскости α.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

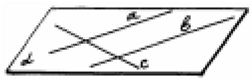
Практическая работа № 15 Аксиомы стереометрии и следствия из них. Параллельность прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми № 1-10.

Тема 10.2. Параллельность прямых.

Цель: Повторить определения параллельности прямых. Научиться изображать параллельные прямые на проекционном чертеже при различном их взаимном расположении в пространстве.

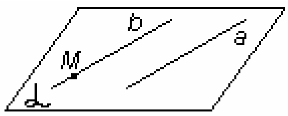
Параллельные прямые в пространстве.

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



$a \parallel b$ (прямая a параллельна прямой b), прямая c и прямая a не параллельны, прямая c и прямая b не параллельны.

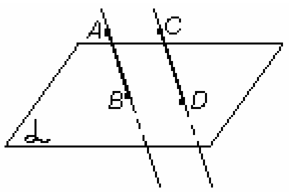
Теорема о параллельных прямых. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.



$M \notin a$

$a \parallel b$ и $M \in b$ (b - единственная)

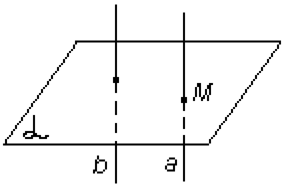
Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.



$AB \parallel CD$

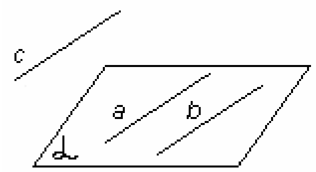
Параллельность трех прямых.

Свойство 1. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



$$\left.\begin{aligned} a \cap \alpha = M \\ a \parallel b \end{aligned}\right\} \Rightarrow b \cap \alpha$$

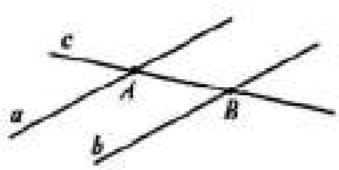
Свойство 2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.



$$\left.\begin{aligned} a \parallel c \\ b \parallel c \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Пример №1: Параллельные прямые a и b лежат в плоскости α. Докажите, что прямая c, пересекающая прямые a и b, также лежит в плоскости α.

Дано:



$a \parallel b$

$a, b \subset \alpha$

$a \cap c = A$

$b \cap c = B$

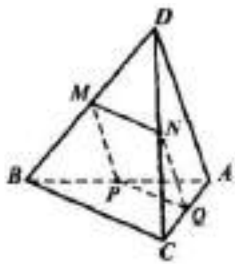
Доказать: $c \subset \alpha$

Доказательство:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} a \cap c = A \\ a \subset \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \in \alpha \\ \left.\begin{aligned} b \cap c = B \\ b \subset \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow B \in \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \subset \alpha \Rightarrow c \subset \alpha \text{ (по А2)}$$

Пример №2: На рисунке точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.

Дано:



$ABCD$ - пирамида

M, N, Q, P — середины отрезков DB, DC, AC, AB

$AD = 12$ см

$BC = 14$ см

Найти: P_{MNQP}—?

Решение:

N, Q — середины отрезков $DC, AC \Longrightarrow NQ$ — средняя линия $\Delta ACD \Longrightarrow NQ \parallel AD$, по свойству средней линии треугольника $NQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см.

P, M — середины отрезков $AB, DB \Longrightarrow PM$ — средняя линия $\Delta ABD \Longrightarrow PM \parallel AD$, по свойству средней линии треугольника $PM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см.

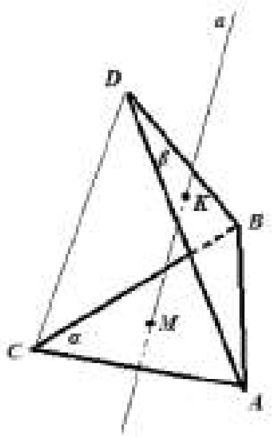
M, N — середины отрезков $DB, DC \Longrightarrow MN$ — средняя линия $\Delta BCD \Longrightarrow MN \parallel BC$, по свойству средней линии треугольника $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ см.

P, Q — середины отрезков $AB, AC \Longrightarrow PQ$ — средняя линия $\Delta ABC \Longrightarrow PQ \parallel BC$, по свойству средней линии треугольника $PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ см.

$P_{MNQP} = NQ + PM + MN + PQ = 6 + 6 + 7 + 7 = 26$ см

Ответ: 26 см.

Пример №3: Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что любая прямая, параллельная отрезку CD, пересекает плоскости данных треугольников.



Дано:

$\Delta ABC \subset \alpha$

$\Delta ABD \subset \beta$

$a \parallel CD$

Доказать: $a \cap \alpha, \beta$

Доказательство:

$\left.\begin{matrix} CD \cap \alpha = C \\ a \parallel CD \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \cap \alpha$ (по С1)

$\left.\begin{matrix} CD \cap \beta = D \\ a \parallel CD \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \cap \beta$ (по С1)

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 15 Аксиомы стереометрии и следствия из них. Параллельность прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми № 11-12.

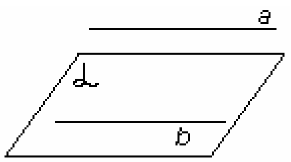
Тема 10.3. Параллельность прямой и плоскости в пространстве.

Цель: Познакомиться с теоремами параллельности прямой и плоскости в пространстве. Научиться выполнять построение углов между прямой и плоскостью; формулировать и приводить доказательства признаков взаимного расположения прямой и плоскости; применять признаки и свойства расположения прямой и плоскости при решении задач; распознавать на чертежах и моделях различных случаев взаимного расположения прямой и плоскости.

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек ($a \parallel \alpha$).

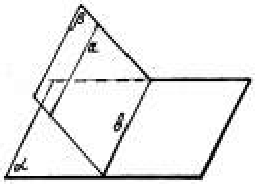
Признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.



$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \subset \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$

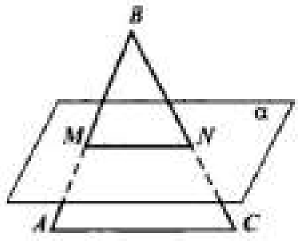
Замечания.



1) Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

2) Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а другая прямая имеет с плоскостью общую точку, то эта прямая лежит в данной плоскости.

Пример №1: Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.



Дано:

ΔABC

$AC \parallel \alpha$

$AB \cap \alpha = M$

$BC \cap \alpha = N$

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta MBN$

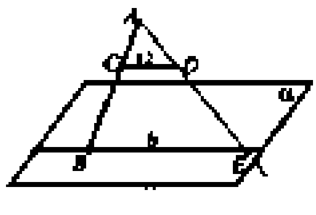
Доказательство:

$\left.\begin{matrix} AB \cap \alpha = M \Rightarrow M \in \alpha \\ BC \cap \alpha = N \Rightarrow N \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \subset \alpha \Rightarrow c \subset \alpha$ (по А2)

$\left.\begin{matrix} AC \parallel \alpha \\ MN \subset \alpha \\ AC \not\subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \parallel MN$ (по признаку параллельности прямой и плоскости)

$\Delta ABC \sim \Delta MBN$ по 1 признаку подобия треугольников ($\angle B$ – общий, $\angle A = \angle M$ как соответственные углы при $AC \parallel MN$).

Пример №2: Точка C лежит на отрезке AB, причем $AB: BC = 4: 3$. Отрезок CD, равный 12 см, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.



Дано:

$C \in AB$

$AB: BC = 4: 3$

$CD = 12$ см

$CD \parallel \alpha$

$B \in \alpha$

Доказать: $AD \cap \alpha = E$

Найти: BE—?

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} CD \parallel \alpha \\ BE \subset \alpha \\ CD \not\subset \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow CD \parallel BE \text{ (по признаку параллельности прямой и плоскости)}$$

$$\left.\begin{array}{c} CD \cap AD = D \\ CD \parallel BE \end{array}\right\} \Longrightarrow AD \subset \alpha = E$$

Решение:

$\Delta ABE \sim \Delta ACD$ по 1 признаку подобия треугольников ($\angle A$ – общий, $\angle C = \angle B$ как соответственные углы при $CD \parallel BE) \Longrightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC}$

AB – 4 части, а AC $4 - 3 = 1$ часть.

$\frac{BE}{12} = \frac{4}{1}$

$BE = 4 \cdot 12 = 48$ см

Ответ: 48 см.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

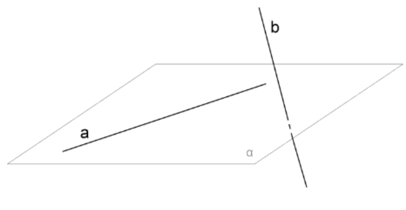
Практическая работа № 15 Аксиомы стереометрии и следствия из них. Параллельность прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми № 13-15.

Тема 10.4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

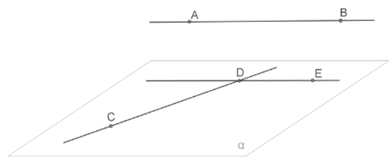
Цель: Познакомиться с теоремами о взаимном расположении двух прямых в пространстве. Научиться формулировать и приводить доказательства признаков взаимного расположения прямых, применять признаки и свойства расположения прямых при решении задач.

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

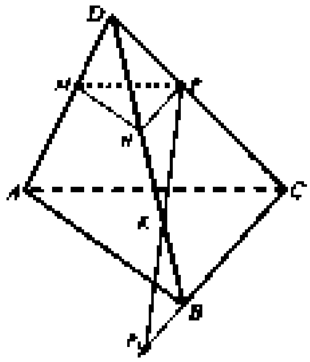
Теорема «Признак скрещивающихся прямых»: Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).



Теорема: Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.



Пример №1: Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.



Дано:

ΔABC

$D \notin (ABC)$

$K \in BN$

M, N, P — середины отрезков DA, DB, DC

Найти: Выясните взаимное расположение прямых:

а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC;

е) MD и BC.

Решение:

а) $ND \cap AB = B$.

б) $PK \cap BC = P_1$.

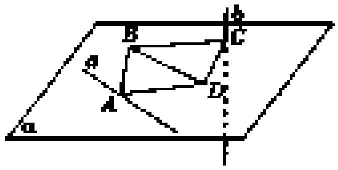
в) M, N — середины отрезков $DA, DB \Rightarrow MN$ — средняя линия $\Delta ADB \Rightarrow MN \parallel AB$.

г) P, M — середины отрезков $DC, DA \Rightarrow PM$ — средняя линия $\Delta ADC \Rightarrow PM \parallel AC$.

д) $\left.\begin{matrix} AC \subset (ABC) \\ KN \cap (ABC) = B \\ B \notin AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow KN \dot{-} AC$ (по признаку скрещивающихся прямых).

е) $\left.\begin{matrix} BC \subset (ABC) \\ MD \cap (ABC) = A \\ A \notin BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MD \dot{-} BC$ (по признаку скрещивающихся прямых).

Пример №2: Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину C — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что: а) прямые a и CD пересекаются; б) a и b скрещивающиеся прямые.



Дано:

$ABCD$- ромб

$A \in a$

$a \parallel BD$

$C \in b$

$b \not\subset (ABCD)$

Доказать: а) $a \cap CD$ б) $a \dot{-} b$

Доказательство:

а) $\left.\begin{array}{c} BD \cap CD = D \\ a \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow a \cap CD$

б) $\left.\begin{array}{c} BD \subset (ABCD) \\ a \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (ABCD)$

$\left.\begin{array}{c} a \subset (ABCD) \\ b \not\subset (ABCD) \\ b \cap (ABCD) = C \\ C \notin a \end{array}\right\} \Rightarrow MD \dot{-} BC$ (по определению скрещивающихся прямых).

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 15 Аксиомы стереометрии и следствия из них. Параллельность прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми № 16-18.

Тема 10.5. Угол между двумя прямыми.

Цель: Научиться выполнять построение углов между прямыми, распознавать на чертежах и моделях различных случаев взаимного расположения прямых.

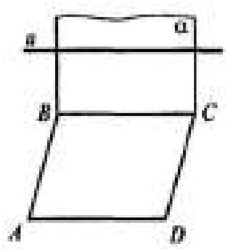
Углы между прямыми.

1. Если прямые параллельны, то угол между ними $\alpha = 0^0$.

2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми $0^0 < \alpha \leq 90^0$.

3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися прямым $0^0 < \alpha \leq 90^0$.

Пример №1: Прямая a параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма. Докажите, что a и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если один из углов параллелограмма равен: а) 50^0; б) 121^0.



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм

$a \not\subset (ABCD)$

$a \parallel BC$

а) 50^0

б) 121^0

Доказать: $a \dotdiv CD$

Найти: a^CD−?

Доказательство:

$$\left.\begin{matrix} CD \subset (ABCD) \\ a \not\subset (ABCD) \\ CD \cap (ABCD) = CD \\ C, D \notin a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \dotdiv CD$$ (по определению скрещивающихся прямых).

Решение:

По свойствам параллелограмма $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.

а) $\angle A = 50^0$

$$\left.\begin{matrix} a \parallel BC \\ CD \cap BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD\text{^}BC = a\text{^}CD = \angle C = \angle A = 50^0$$

б) $\angle B = 121^0$

$$\left.\begin{matrix} a \parallel BC \\ CD \cap BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD^{\wedge}BC = a^{\wedge}CD = \angle C = 180^0 - \angle B = 180^0 - 121^0 = 59^0$$

Ответ: а) 50^0; б) 59^0.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 15 Аксиомы стереометрии и следствия из них. Параллельность прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми № 19-21.

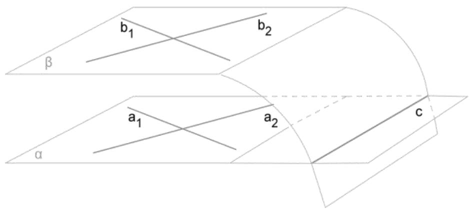
Тема 10.6. Параллельность плоскостей.

Цель: Познакомиться с теоремами о параллельности плоскостей в пространстве. Научиться формулировать и приводить доказательства признаков параллельности плоскостей, применять признаки и свойства параллельности плоскостей при решении задач.

Плоскости, которые не пересекаются, называются параллельными.

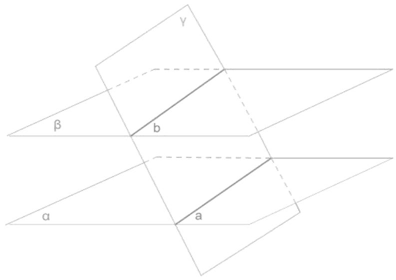
Параллельные плоскости α и β обозначаются α ∥ β.

Признак параллельности плоскостей.

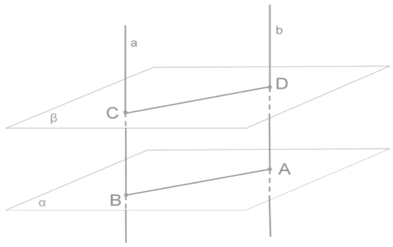


Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства параллельных плоскостей.



Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

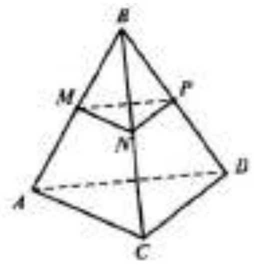


Теорема 2. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.

Пример №1: Укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной обстановки (устно).

Пример №2: Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P — середины отрезков BA, BC и BD соответственно. а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны. б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.

Дано:



ΔADC

$B \notin (ADC)$

M, N, P — середины отрезков BA, BC, BD

$S_{ADC} = 48$ см^2

а) Доказать: $(MNP) \parallel (ADC)$

б) Найти: $S_{\Delta MNP}$—?

а) Доказательство:

M, N — середины отрезков $BA, BC \Rightarrow MN$ — средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.

г) P, M — середины отрезков $BD, BA \Rightarrow PM$ — средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow PM \parallel AD$.

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel AC \\ PM \parallel AD \\ MN \cap PM \\ AC \cap AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MNP) \parallel (ADC) \text{ (по Т1)}$$

б) Решение:

В ΔMNP все стороны являются средними линиями ΔADC и равны половине длин его сторон.

$\Delta MNP \sim \Delta ADC$ по 3 признаку подобия треугольников ($\frac{MN}{AC} = \frac{NP}{CD} = \frac{PM}{AD} = \frac{1}{2}$)

По формуле отношения площадей подобных треугольников: $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{ADC}} = k^2$.

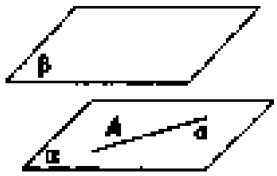
$$\frac{S_{\Delta MNP}}{48} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{S_{\Delta MNP}}{48} = \frac{1}{4}$$

$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$ см^2

Ответ: 12 см^2.

Пример №3: Плоскости α и β параллельны, A — точка плоскости α. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости β, лежит в плоскости α.



Дано:

$\alpha \parallel \beta$

$A \in \alpha$

$A \in a$

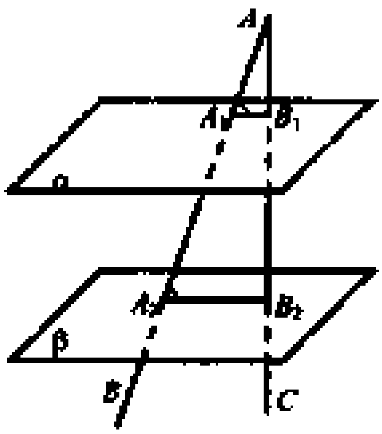
$a \parallel \beta$

Доказать: $a \subset \alpha$

Доказательство:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \parallel \beta \\ A \in \alpha \\ A \in a \\ a \parallel \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \subset \alpha$$ Иначе бы $a \cap \beta$, а это противоречит условию.

Пример №4: Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите: A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$.



Дано:

$\alpha \parallel \beta$

$\angle BAC$

$\alpha \cap AB = A_1$

$\beta \cap AB = A_2$

$\alpha \cap AC = B_1$

$\beta \cap AC = B_2$

$A_1B_1 = 18$ см

$AA_1 = 24$ см

$AA_2 = \frac{3}{2} A_1A_2$

Найти: $A_2B_2, AA_2 - ?$

Решение:

$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2$

$\Delta AA_1B_1 \sim \Delta AA_2B_2$ по 1 признаку подобия треугольников ($\angle A$ – общий, $\angle A_1 = \angle A_2$ как соответственные углы при $A_1B_1 \parallel A_2B_2) \Longrightarrow \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$

Пусть $A_1A_2 = x$, тогда $AA_2 = \frac{3}{2} A_1A_2 = 1{,}5x$, с другой стороны

$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 24 + x$. Приравняем два получившихся уравнения:

$1{,}5x = 24 + x$

$1{,}5x - x = 24$

$0{,}5x = 24$

$x = 48$ см - A_1A_2, тогда $AA_2 = 1{,}5x = 1{,}5 \cdot 48 = 72$ см

$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$

$\frac{24}{72} = \frac{18}{A_2B_2}$

$24A_2B_2 = 18 \cdot 72$

$A_2B_2 = \frac{18 \cdot 72}{24} = 54$ см

Ответ: $AA_2 = 72$ см, $A_2B_2 = 54$ см.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

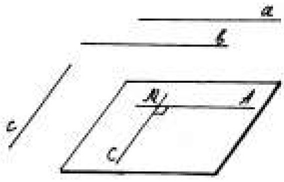
Практическая работа № 15 Аксиомы стереометрии и следствия из них. Параллельность прямых, прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми № 22-25.

Тема 10.7. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Цель: Познакомиться с теоремами о перпендикулярности прямой и плоскости. Научиться изображать на рисунках перпендикуляры к плоскости, описывать расстояние от прямой до плоскости.

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^0.

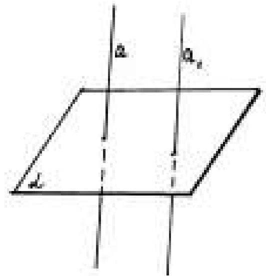
Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.



Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости.

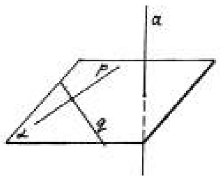
Признак перпендикулярности прямой и плоскости.



Связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна

Пример №1: Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:

а) $DC \perp B_1C_1$, и $AB \perp A_1D_1$ если $\angle BAD = 90^0$;

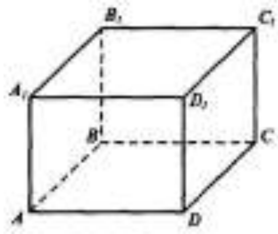
б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

а) Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед

$\angle BAD = 90^0$

Доказать: $DC \perp B_1C_1, AB \perp A_1D_1$



Доказательство:

$ABCD$ – параллелограмм с $\angle BAD = 90^0 \Longrightarrow ABCD$ – прямоугольник.

$$\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AB \parallel DC \\ AD \parallel B_1C_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow DC \perp B_1C_1 \text{ (по лемме)}$$

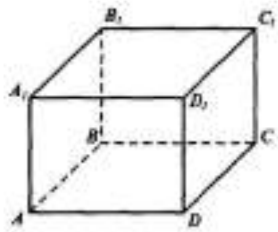
$$\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AD \parallel A_1D_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AB \perp A_1D_1 \text{ (по лемме)}$$

б) Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед

$AB \perp DD_1$

Доказать: $AB \perp CC_1, DD_1 \perp A_1B_1$



Доказательство:

$$\left.\begin{matrix} AB \perp DD_1 \\ DD_1 \parallel CC_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AB \perp CC_1 \text{ (по лемме)}$$

$$\left.\begin{matrix} AB \perp DD_1 \\ AB \parallel A_1B_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow DD_1 \perp A_1B_1 \text{ (по лемме)}$$

Пример №2: В тетраэдре $ABCD$ известно, что $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины ребер AB и AC.

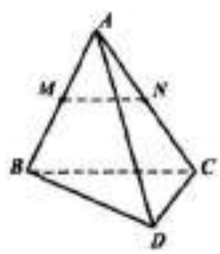
Дано:

$ABCD$ - тетраэдр

$BC \perp AD$

M, N — середины ребер AB, AC

Доказать: $AD \perp MN$

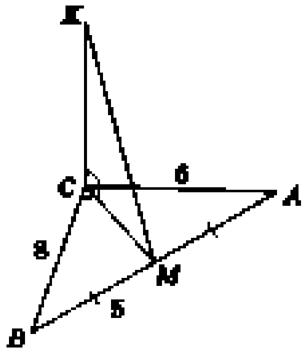


Доказательство:

M, N — середины отрезков $AB, AC \Longrightarrow MN$ — средняя линия $\Delta ABC \Longrightarrow MN \parallel BC$.

$$\left.\begin{matrix} BC \perp AD \\ MN \parallel BC \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AD \perp MN \text{ (по лемме)}$$

Пример №3: В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90^0$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем $CK = 12$ см. Найдите KM.



Дано:

ΔABC

$\angle C = 90^0$

$AC = 6$ см

$BC = 8$ см

CM — медиана

$CK \perp (ABC)$

$CK = 12$ см

Найти: $KM-?$

Решение:

$\angle C = 90^0 \Longrightarrow \Delta ABC$ – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 6^2 + 8^2$

$AB^2 = 36 + 64$

$AB^2 = 100$

$AB = \sqrt{100}$

$AB = 10$ см

По свойству медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника: $BM = AM = CM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ см

$CK \perp (ABC) \Longrightarrow CK \perp CM \Longrightarrow \Delta KCM$ – прямоугольный. По теореме Пифагора: $KM^2 = CK^2 + CM^2$

$KM^2 = 12^2 + 5^2$

$KM^2 = 144 + 25$

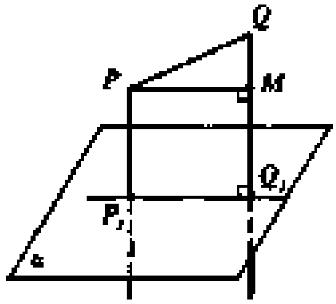
$KM^2 = 169$

$KM = \sqrt{169}$

$KM = 13$ см

Ответ: 13 см.

Пример №4: Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21{,}5$ см, $QQ_1 = 33{,}5$ см.



Дано:

$PP_1 \perp \alpha$

$QQ_1 \perp \alpha$

$P_1 \in \alpha$

$Q_1 \in \alpha$

$PQ = 15$ см

$PP_1 = 21{,}5$ см

$QQ_1 = 33{,}5$ см

Найти: $P_1Q_1 -?$

Решение:

$\left.\begin{array}{l} PP_1 \perp \alpha \\ QQ_1 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow PP_1 \parallel QQ_1$ (если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны).

$\left.\begin{array}{l} PP_1 \parallel QQ_1 \\ PQ \nparallel P_1Q_1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1PQQ_1$ – прямоугольная трапеция (из определения трапеции и $P_1Q_1 \perp QQ_1$).

Проведем $PM \parallel P_1Q_1$.

$\left.\begin{array}{r} PP_1 \parallel QQ_1 \\ PM \parallel P_1Q_1 \\ \angle P_1 = \angle Q_1 = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1PMQ_1$ – прямоугольник.

$\angle PMQ = 90^0 \Rightarrow \Delta PMQ$ – прямоугольный.

$QM = QQ_1 - PP_1 = 33{,}5 - 21{,}5 = 12$ см

По теореме Пифагора:

$PQ^2 = PM^2 + QM^2$

$15^2 = PM^2 + 12^2$

$PM^2 = 225 - 144$

$PM^2 = 81$

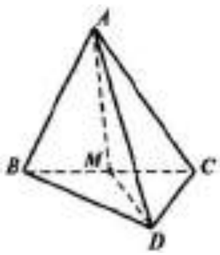
$PM = \sqrt{81}$

$PM = 9$ см

$PM = P_1Q_1 = 9$ см

Ответ: 9 см.

Пример №5: В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BC, $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC.



Дано:

$ABCD$ - тетраэдр

M — середина ребра BC

$AB = AC$

$DB = DC$

Доказать: $BC \perp (ADM)$

Доказательство:

ΔABC – равнобедренный, т.к. $AB = AC$. M — середина ребра $BC \Rightarrow AM$ – медиана ΔABC, по свойству медианы равнобедренного треугольника $AM \perp BC$.

ΔDBC – равнобедренный, т.к. $DB = DC$. M — середина ребра $BC \Rightarrow AM$ – медиана ΔDBC, по свойству медианы равнобедренного треугольника $DM \perp BC$.

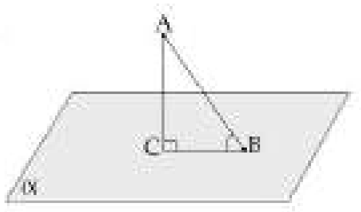
$\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ DM \perp BC \\ AM \cap DM \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (ADM)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №16 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей № 1-6.

Тема 10.8. Перпендикуляр и наклонная.

Цель: Познакомиться с понятиями перпендикуляра и наклонной. Научиться изображать на рисунках перпендикуляры и наклонные к плоскости, описывать расстояние от точки до плоскости.



АВ - наклонная.

В - основание наклонной.

АС - перпендикуляр.

С - основание перпендикуляра.

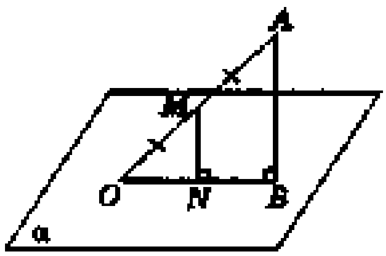
СВ - проекция наклонной АВ на плоскость α.

Треугольник АВС прямоугольный.

$\angle CBA$ - угол между наклонной АВ и плоскостью α.

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

Пример №1: Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.



Дано:

$A \notin \alpha$

$B \in \alpha$

$AB \perp \alpha$

$AB = 6$ см

M — середина отрезка AO

$MN \perp \alpha$

Найти: $MN-?$

Решение:

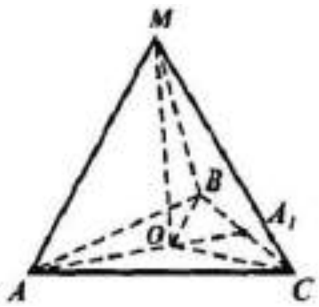
$\left.\begin{matrix} AB \perp \alpha \\ MN \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel MN$ (если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны).

$$\left.\begin{array}{c} AB \parallel MN \\ AM = MO \text{ (т.к. } M \text{ — середина } AO) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \text{ — средняя линия } \Delta ABO \text{ и по}$$

свойству средней линии $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ см.

Ответ: 3 см.

Пример №2: Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см .



Дано:

ΔABC – правильный

$MA = MB = MC = 4$ см

$AB = 6$ см

$MO \perp (ABC)$

$O \in (ABC)$

Найти: $MO-?$

Решение:

Рассмотрим ΔABC – правильный $\Longrightarrow AB = AC = BC = 6$ см и

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$.

Т.к. равны наклонные $MA = MB = MC$, то равны и их проекции

$OA = OB = OC \Longrightarrow (\cdot)O$ – центр правильного ΔABC. Проведем медиану AA_1, она будет являться биссектрисой и высотой по свойству медианы в равнобедренном треугольнике.

1 способ: Рассмотрим ΔAA_1B – прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике: $\sin 60^0 = \frac{AA_1}{AB}$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AA_1}{6}$ $AA_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ см	2 способ: По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$, где R - это радиус описанной окружности вокруг ΔABC и $R = AO$ $\frac{6}{\sin 60^0} = 2 \cdot AO$ $2 \cdot AO = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{AO}{OA_1} = \frac{2}{1}$ AA_1 – 3 части, а AO – 2 части. $3\sqrt{3}: 3 = \sqrt{3}$ см – 1 часть. $AO = 2\sqrt{3}$ см	$AO = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot \sqrt{3}}$ $AO = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$ $AO = 2\sqrt{3}$ см

$MO \perp (ABC) \Longrightarrow MO \perp AO \Longrightarrow \angle O = 90^0 \Longrightarrow \Delta AOM$ – прямоугольный. По теореме Пифагора: $AM^2 = AO^2 + MO^2$

$4^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + MO^2$

$MO^2 = 16 - 4 \cdot 3$

$MO^2 = 16 - 12$

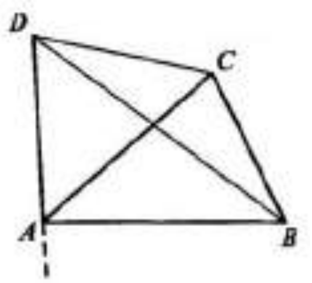
$MO^2 = 4$

$MO = \sqrt{4}$

$MO = 2$ см

Ответ: 2 см.

Пример №3: Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника, а) Докажите, что треугольник CBD прямоугольный, б) Найдите BD, если $BC = a$, $DC = b$.



Дано:

ΔABC

$\angle C = 90^0$

$BC = a$

$DC = b$

$AD \perp (ABC)$

а) Доказать: ΔCBD – прямоугольный

б) Найти: BD–?

а) Доказательство:

$$\left.\begin{array}{c}\angle C = 90^0 \Rightarrow AC \perp BC \\ AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC \\ AC \cap AD\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (ACD)$$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow BC \perp CD \Rightarrow \Delta CBD$ – прямоугольный.

б) Решение:

$\angle C = 90^0 \Rightarrow \Delta CBD$ – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$BD^2 = BC^2 + DC^2$

$BD^2 = a^2 + b^2$

$BD = \sqrt{a^2 + b^2}$

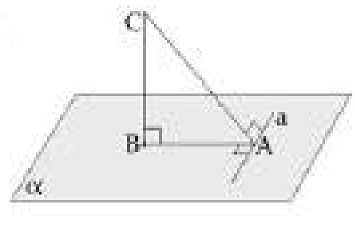
Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №16 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей № 7-4.

Тема 10.9. Угол между прямой и плоскостью.

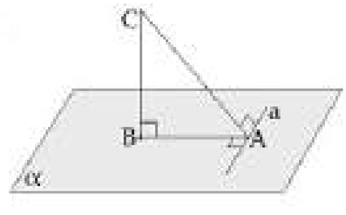
Цель: Познакомиться с теоремами о угле между прямой и плоскостью. Научиться изображать углы между прямой и плоскостью, обосновывать построения, определять и вычислять расстояния в пространстве, от прямой до плоскости, формулировать и доказывать основные теоремы о расстояниях.



Теорема о трёх перпендикулярах:

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.

$$\left.\begin{array}{c}BC \perp AB \\ AB \perp a\end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp a$$

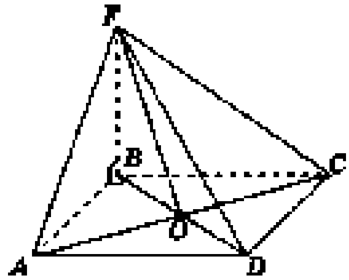


Обратная теорема о трёх перпендикулярах:

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

$$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ AC \perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp a$$

Пример №1: Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если $BF = 8$ дм, $AB = 4$ дм.



Дано:

$ABCD$ – квадрат

$F \notin (ABCD)$

$BF \perp (ABCD)$

$BF = 8$ дм

$AB = 4$ дм

Найти: $d(F, AB), d(F, BC), d(F, CD), d(F, AD), d(F, AC), d(F, BD)$–?

Решение:

$BF \perp (ABCD) \Rightarrow d(F, AB) = d(F, BC) = d(F, BD) = BF = 8$ дм

$\Delta ABF = \Delta CBF$ по 1 признаку равенства треугольников ($\angle B = 90^0$, BF - общая сторона, $AB = BC$ (т.к. $ABCD$ – квадрат) $\Rightarrow FA = FC$.

$$\left.\begin{matrix} BF \perp (ABCD) \Rightarrow BF \perp AB \\ AB \perp AD \text{ (т.к.} ABCD - \text{ квадрат)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AF \perp AD = d(F, AD) = FA$$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$$\left.\begin{matrix} BF \perp (ABCD) \Rightarrow BF \perp BC \\ BC \perp CD \text{ (т.к.} ABCD - \text{ квадрат)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow FC \perp CD = d(F, CD) = FC$$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

Рассмотрим ΔABF - прямоугольный. По теореме Пифагора:

$FA^2 = BF^2 + AB^2$

$FA^2 = 8^2 + 4^2$

$FA^2 = 64 + 16$

$FA^2 = 80$

$FA = \sqrt{80}$

$FA = \sqrt{16 \cdot 5}$

$FA = 4\sqrt{5}$ дм $= FC$

$$\left.\begin{array}{r} BF \perp (ABCD) \Rightarrow BF \perp BO \\ BO \perp AC \text{ (по свойству диагоналей квадрата)} \end{array}\right\} \Rightarrow FO \perp AC =$$

$= d(F, AC) = FO$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

Рассмотрим ΔABD – прямоугольный и равнобедренный $AB = AD = 4$ дм. По теореме Пифагора:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 4^2 + 4^2$

$BD^2 = 16 + 16$

$BD^2 = 32$

$BD = \sqrt{32}$

$BD = \sqrt{16 \cdot 2}$

$BD = 4\sqrt{2}$ дм

По свойству диагоналей квадрата: $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ см

Рассмотрим ΔFBO - прямоугольный. По теореме Пифагора:

$FO^2 = BF^2 + BO^2$

$FO^2 = 8^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$FO^2 = 64 + 4 \cdot 2$

$FO^2 = 72$

$FO = \sqrt{72}$

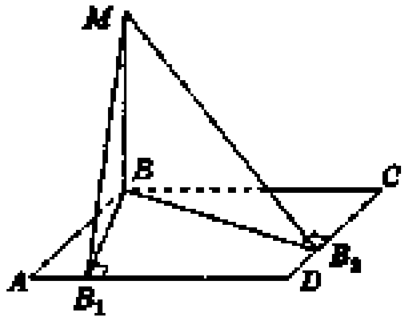
$FO = \sqrt{36 \cdot 2}$

$FO = 6\sqrt{2}$ дм

Ответ: $d(F, AB) = d(F, BC) = d(F, BD) = 8$ дм,

$d(F, AD) = d(F, CD) = 4\sqrt{5}$ дм, $d(F, AC) = 6\sqrt{2}$ дм.

Пример №2: Через вершину В ромба $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60^0$, $BM = 12{,}5$ см.



Дано:

$ABCD$ – ромб

$M \notin (ABCD)$

$BM \perp (ABCD)$

$AB = 25$ см

$\angle BAD = 60^0$

$BM = 12{,}5$ см

Найти: $d(M, AB), d(M, BC), d(M, CD), d(M, AD)$–?

Решение:

$BM \perp (ABCD) \Longrightarrow d(M, AB) = d(M, BC) = BM = 12{,}5$ см

Проведем из вершины B ромба $ABCD$ два перпендикуляра BB_1 и BB_2, из симметрии ромба $BB_1 = BB_2$.

$\Delta MBB_1 = \Delta MBB_2$ по 1 признаку равенства треугольников ($\angle B = 90^0$, BM - общая сторона, $BB_1 = BB_2$) $\Longrightarrow MB_1 = MB_2$.

$\left.\begin{array}{r} BM \perp (ABCD) \Longrightarrow BM \perp BB_1 \\ BB_1 \perp AD \text{ (по построению)} \end{array}\right\} \Longrightarrow MB_1 \perp AD = d(M, AD) = MB_1$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$\left.\begin{array}{r} BM \perp (ABCD) \Longrightarrow BM \perp BB_2 \\ BB_2 \perp CD \text{ (по построению)} \end{array}\right\} \Longrightarrow MB_2 \perp CD = d(M, CD) = MB_2$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

Рассмотрим ΔABB_1 - прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin \angle BAD = \frac{BB_1}{AB}$

$\sin 60^0 = \frac{BB_1}{25}$

$BB_1 = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12{,}5\sqrt{3}$ см $= BB_2$

Рассмотрим ΔMBB_1 – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$MB_1{}^2 = BM^2 + BB_1{}^2$

$MB_1{}^2 = 12{,}5^2 + \left(12{,}5\sqrt{3}\right)^2$

$MB_1{}^2 = 156{,}25 + 156{,}25 \cdot 3$

${MB_1}^2 = 156{,}25 + 468{,}75$

${MB_1}^2 = 625$

$MB_1 = \sqrt{625}$

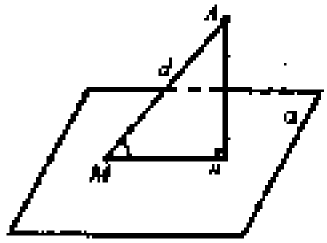
$MB_1 = 25$ см $= MB_2$

Ответ: $d(M, AB) = d(M, BC) = 12{,}5$ см ,

$d(M, AD) = d(M, CD) = 25$ см.

Пример №3: Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна d. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 45^0?

Дано:



$AM = d$ – наклонная

$A \notin \alpha$

$M \in \alpha$

$AM^\wedge\alpha = 45^0$

Найти: HM—?

Решение:

Проведем из точки A перпендикуляр AH, тогда проекцией наклонной AM на плоскость α будет являться HM, а $AM^\wedge\alpha = \angle M = 45^0$.

Рассмотрим ΔAHM - прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\cos\angle M = \frac{HM}{AM}$

$\cos 45^0 = \frac{HM}{d}$

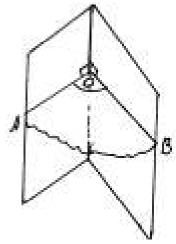
$HM = d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} d$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №16 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей № 5-16.

Тема 10.10. Двугранный угол.

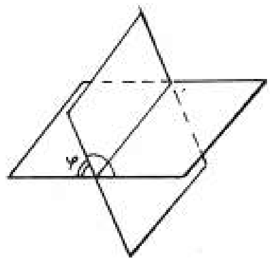
Цель: Познакомиться с теоремой о двугранном угле. Научиться определять углы между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве, отработать определение двугранного угла и его характеристику (линейный угол), по аналогии с плоским углом, научиться строить линейный угол двугранного угла.



Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей a, и не принадлежащими одной плоскости.

a - ребро двугранного угла, полуплоскости - грани его.

Угол $\angle AOB$ - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку O на ребре, а лучи OA и OB должны быть перпендикулярны к ребру.



Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.

Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90^0 (меньше 90^0, больше 90^0).

Пусть φ - тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда угол между пересекающимися плоскостями равен φ $(0^0 < \alpha \leq 90^0)$.

Пример №1: В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M — середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ —линейный угол двугранного угла $BACD$.

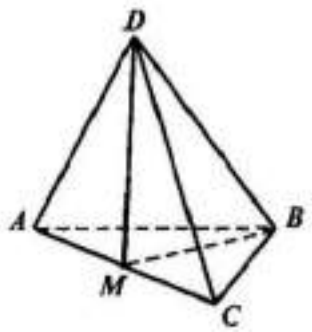
Дано:

$DABC$ – тетраэдр

$AB = BC = AC = DA = DB = DC$

M — середина ребра AC

Доказать: $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.



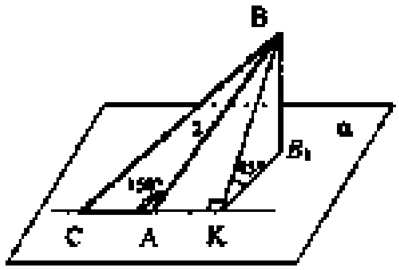
Доказательство:

ΔABC – равносторонний (по условию). M — середина ребра $AC \Longrightarrow BM$ – медиана ΔABC, по свойству медианы равнобедренного треугольника $BM \perp AC$.

ΔADC – равносторонний (по условию). M — середина ребра $AC \Longrightarrow DM$ – медиана ΔADC, по свойству медианы равнобедренного треугольника $DM \perp AC$.

$$\left.\begin{aligned} BM \perp AC \\ DM \perp AC \\ (BAC) \cap (DAC) = AC \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \angle DMB$$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.

Пример №2: Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150^0$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45^0.



Дано:

ΔABC

$AC \subset \alpha$

$B \notin \alpha$

$BB_1 \perp \alpha$

$AB = 2$ см

$\angle BAC = 150^0$

двугранный угол $BACB_1 = 45^0$

Найти: $d(B, AC), d(B, \alpha)$–?

Решение:

Проведем из точки B_1 перпендикуляр B_1K к прямой AC.

$$\left.\begin{aligned} BB_1 \perp \alpha \Longrightarrow BB_1 \perp B_1K \\ B_1K \perp AC \text{ (по построению)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow BK \perp AC = d(B, AC) = BK$$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$$\left.\begin{aligned} BK \perp AC \\ B_1K \perp AC \\ (BAC) \cap \alpha = AC \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \angle BKB_1$$ — линейный угол двугранного угла $BACB_1$ и $\angle BKB_1 = \angle BACB_1 = 45^0$.

$BK \perp AC \Longrightarrow \Delta ABK$ – прямоугольный. $\angle BAK = 180^0 - 150^0 = 30^0$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin \angle BAK = \frac{BK}{AB}$

$\sin 30^0 = \frac{BK}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{BK}{2}$

$BK = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ см

Т.к. $BB_1 \perp \alpha$, то $d(B, \alpha) = BB_1$. ΔBB_1K – прямоугольный. $\angle BKB_1 = 45^0$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin \angle BKB_1 = \frac{BB_1}{BK}$

$\sin 45^0 = \frac{BB_1}{1}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BK}{1}$

$BK = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ см

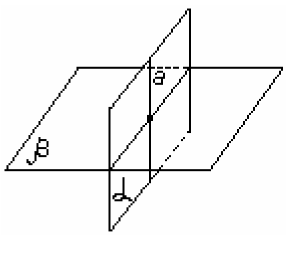
Ответ: $d(B, AC) = 1$ см, $d(B, \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №16 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей № 17-20.

Тема 10.11. Перпендикулярность плоскостей.

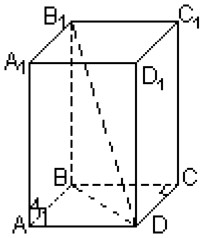
Цель: Познакомиться с теоремой о перпендикулярности плоскостей. Научиться воспроизводить доказательство признака и свойств перпендикулярных плоскостей на основе понятия двугранного угла.



Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^0.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Если одна из двух плоскостей α проходит через прямую a, перпендикулярную другой плоскости β, то такие плоскости перпендикулярны.



Прямоугольный параллелепипед.

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники.

Свойства.

В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней представляют собой прямоугольники.

Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда являются прямыми

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Пример №1: Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: 1, 1, 2.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №16 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей № 21-23.

Тема 10.12. Многогранные углы.

Цель: Познакомиться с понятием многогранных углов. Закрепить навыки нахождения двугранных углов.

Трёхгранный угол

Многогранные углы.

Объясним понятие многогранных углов.

Представим несколько лучей в пространстве с общим началом. Их можно представить тоже как часть линий

Четырёхгранный угол

пересечения плоскостей - трёх, четырёх или больше и назвать рёбрами многогранного угла.

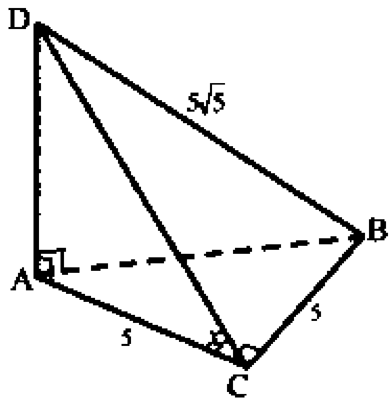
Каждые два луча образуют угол, который называют плоским углом многогранного угла.

Свойства:

1.Каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

2.Сумма плоских углов многогранного угла меньше 360^0.

Пример №1: Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.



Дано:

$ABCD$ - тетраэдр

$\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^0$

$AC = CB = 5$

$DB = 5\sqrt{5}$

Найти: двугранный угол $ABCD-$?

Решение:

$\left.\begin{array}{r}\angle DAB = 90^0 \Rightarrow DA \perp AB \\ \angle DAC = 90^0 \Rightarrow DA \perp AC \\ AB \cap AC\end{array}\right\} \Rightarrow DA \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

$\left.\begin{array}{r}DA \perp AC \\ \angle ACB = 90^0 \Rightarrow AC \perp CB\end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp CB$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$\left.\begin{array}{r}AC \perp CB \\ DC \perp CB \\ (ABC) \cap (DBC) = BC\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACD$ — линейный угол двугранного угла $ABCD$.

Рассмотрим ΔDBC - прямоугольный. По теореме Пифагора:

$DB^2 = DC^2 + CB^2$

$$\left(5\sqrt{5}\right)^2 = DC^2 + 5^2$$

$$25 \cdot 5 = DC^2 + 25$$

$$DC^2 = 125 - 25$$

$$DC^2 = 100$$

$$DC = \sqrt{100}$$

$$DC = 10$$

Рассмотрим ΔABC – прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$$\cos\angle ACD = \frac{AC}{DC}$$

$$\cos\angle ACD = \frac{5}{10}$$

$$\cos\angle ACD = \frac{1}{2}$$

$$\angle ACD = 60^0$$

Ответ: 60^0.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа №16 Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей № 24-26.

Тема 11.1. Понятие многогранника. Призма.

Цель: Познакомиться с определениями многогранника и призмы. Научиться изображать куб, прямоугольный параллелепипед, призму, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять линейные элементы и углы куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, аргументировать своих суждения.

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранником.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями.

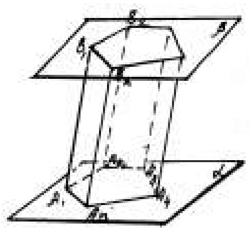
Стороны граней называются рёбрами, а концы рёбер - вершинами многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360^0.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется призмой. Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются основаниями, а параллелограммы — боковыми гранями призмы.



Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются боковыми рёбрами призмы. Боковые рёбра призмы равны друг другу. Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае — наклонной.

Прямая призма называется правильной, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

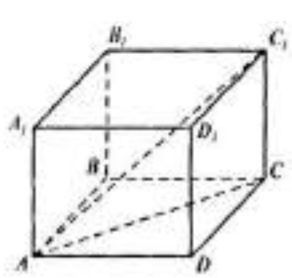
Пример №1: В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45^0. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед

$AD = 12$ см

$AB = 5$ см



$\angle CAC_1 = 45^0$

Найти: $CC_1 -?$

Решение:

Т.к. $ABCD$ – прямоугольный параллелепипед, значит $AD = BC, AB = DC$ и ΔADC – прямоугольный с прямым углом $\angle D = 90^0$. По теореме Пифагора:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AC^2 = 12^2 + 5^2$

$AC^2 = 144 + 25$

$AC^2 = 169$

$AC = \sqrt{169}$

$AC = 13$ см

Рассмотрим ΔACC_1 – прямоугольный с прямым углом $\angle C = 90^0$. $\angle AC_1C = 180^0 - \angle C - \angle CAC_1 = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0 \Longrightarrow \Delta ACC_1$ является равнобедренным, т.е. $AC = CC_1 = 13$ см.

Ответ: 13 см.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

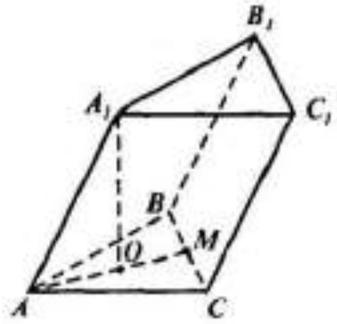
Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 1-2.

Тема 11.2. Наклонная призма.

Цель: Познакомиться с определением наклонной призмы. Научиться изображать наклонную призму, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять линейные элементы и углы наклонной призмы, аргументировать своих суждения.

Пример №1: Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45^0. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника. Найти площадь грани CC_1B_1B.

Дано:



$ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма

ΔABC – равнобедренный

$AC = AB = 13$ см

$BC = 10$ см

$AA_1 \wedge (ABC) = 45^0$

$(\cdot)O$ – точка пересечения медиан

$A_1O \perp (ABC)$

Найти: $S_{CC_1B_1B}$–?

Решение:

Проведем из точки A медиану ΔABC к стороне BC – AM, а из точки A_1 перпендикуляр к AM – A_1O.

Рассмотрим ΔABC – равнобедренный (по условию). AM – медиана ΔABC, по свойству медианы равнобедренного треугольника $AM \perp BC$.

Докажем, что CC_1B_1B – прямоугольник.

$\left.\begin{matrix} A_1O \perp (ABC) \Rightarrow A_1O \perp AM \\ AM \perp BC \Rightarrow AO \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA_1 \perp BC$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$\left.\begin{matrix} AA_1 \perp BC \\ AA_1 \parallel BB_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB_1 \perp BC$ (по лемме)

$\left.\begin{matrix} BC \perp B_1C_1 \\ CC_1 \parallel BB_1 \\ BB_1 \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow CC_1B_1B$ – прямоугольник

$S_{CC_1B_1B} = BB_1 \cdot BC$

Рассмотрим ΔABM – прямоугольный. $BM = CM = 5$ см (т.к. AM – медиана, биссектриса и высота равнобедренного ΔABC).

По теореме Пифагора:

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

$13^2 = AM^2 + 5^2$

$AM^2 = 169 - 25$

$AM^2 = 144$

$AM = \sqrt{144}$

$AM = 12$ см

$\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$

AM – 3 части, а $AO - 2$ части.

$12:3 = 4$ см – 1 часть.

$AO = 8$ см

Рассмотрим ΔAOA_1 – прямоугольный с прямым углом $\angle O = 90^0$, AA_1^$(ABC) = \angle A_1AO = 45^0$.

$\angle AA_1O = 180^0 - \angle O - \angle A_1AO = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0 \Longrightarrow \Delta AOA_1$ является равнобедренным, т.е. $AO = A_1O = 8$ см.

По теореме Пифагора:

$AA_1{}^2 = AO^2 + A_1O^2$

$AA_1{}^2 = 8^2 + 8^2$

$AA_1{}^2 = 64 + 64$

$AA_1{}^2 = 128$

$AA_1 = \sqrt{128}$

$AA_1 = \sqrt{64 \cdot 2}$

$AA_1 = 8\sqrt{2}$ см $= BB_1$

$S_{CC_1B_1B} = BB_1 \cdot BC = 8\sqrt{2} \cdot 10 = 80\sqrt{2}$ см^2

Ответ: $80\sqrt{2}$ см^2.

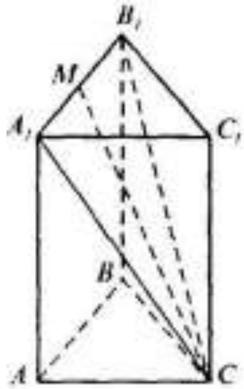
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 3-4.

Тема 11.3. Нахождение элементов призмы.

Цель: Научиться характеризовать и изображать сечения призмы, развертки многогранников, применять свойства симметрии при решении задач.

Пример №1: Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма

$AB = AC = BC = 8$ см

$AA_1 = 6$ см

Найти: $S_{CA_1B_1}$–?

Решение:

ΔCA_1B_1 равнобедренный, т.к. призма правильная. Проведем из точки C медиану ΔCA_1B_1 к стороне A_1B_1 – CM, по свойству медианы равнобедренного треугольника $CM \perp A_1B_1$.

Рассмотрим ΔAA_1C – прямоугольный с прямым углом $\angle A = 90^0$.

По теореме Пифагора:

$CA_1{}^2 = AC^2 + AA_1{}^2$

$CA_1{}^2 = 8^2 + 6^2$

$CA_1{}^2 = 64 + 36$

$CA_1{}^2 = 100$

$CA_1 = \sqrt{100}$

$CA_1 = 10$ см

Рассмотрим ΔA_1MC – прямоугольный с прямым углом $\angle M = 90^0$.

$A_1M = B_1M = 4$ см (т.к. СM – медиана, биссектриса и высота равнобедренного ΔCA_1B_1).

По теореме Пифагора:

$CA_1{}^2 = CM^2 + A_1M^2$

$10^2 = CM^2 + 4^2$

$CM^2 = 100 - 16$

$CM^2 = 84$

$CM = \sqrt{84}$

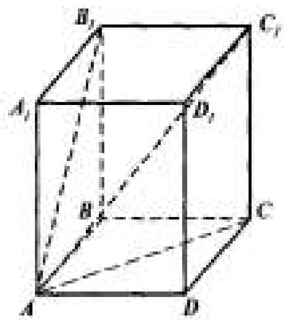
$CM = \sqrt{4 \cdot 21}$

$CM = 2\sqrt{21}$ см

$S_{CA_1B_1} = \frac{1}{2}CM \cdot A_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot 8 = 8\sqrt{21}$ см^2

Ответ: $8\sqrt{21}$ см^2.

Пример №2: Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30^0. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма

AC_1^$(ABB_1) = 30^0$

Найти: AC_1^(ABC)–?

Решение:

Проведем проекции AB_1 и AC отрезка AC_1 на боковые грани ABB_1A_1 и $ABCD$.

AC_1^$(ABB_1) = \angle B_1AC_1 = 30^0$

AC_1^$(ABC) = \angle CAC_1$

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма $\Longrightarrow ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – равные квадраты. Пусть сторона квадрата равна x.

Рассмотрим ΔAB_1C_1 – прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin \angle B_1AC_1 = \frac{B_1C_1}{AC_1}$

$\sin 30^0 = \frac{x}{AC_1}$

$AC_1 \cdot \sin 30^0 = x$

$AC_1 = \frac{x}{\sin 30^0}$

$AC_1 = \frac{x}{\frac{1}{2}}$

$AC_1 = 2x$

Рассмотрим ΔADC – прямоугольный и равнобедренный, т.к. $ABCD$ – квадрат. $\angle CAD = \angle ACD = 45^0$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin \angle CAD = \frac{CD}{AC}$

$\sin 45^0 = \frac{x}{AC}$

$AC \cdot \sin 45^0 = x$

$AC = \frac{x}{\sin 45^0}$

$AC = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$AC = \frac{2x}{\sqrt{2}}$

$AC = \sqrt{2}x$

Рассмотрим ΔCAC_1 – прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\cos \angle CAC_1 = \frac{AC}{AC_1} = \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle CAC_1 = 45^0$

Ответ: 45^0.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 5.

Тема 11.4. Нахождение полной и боковой поверхности призмы.

Цель: Познакомиться с формулами полной и боковой поверхности призмы. Научиться вычислять площади боковой и полной поверхностей куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности призмы — сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$$S_{бок} = P \cdot h$$

Пример №1: В правильной n - угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площадь боковой и полной поверхностей призмы, если: $n = 3$, $a = 10$ см, $h = 15$ см.

$n = 3$, значит в основании равносторонний треугольник с равными углами по 60^0. Площадь любого треугольника можно найти по формуле:

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(a^\wedge b) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 60^0 = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$ см^2

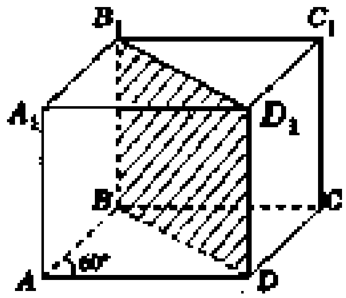
Найдем периметр равностороннего треугольника:

$P_\Delta = 3 \cdot a = 3 \cdot 10 = 30$ см

$S_{бок} = P \cdot h = 30 \cdot 15 = 450$ см^2

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 450 + 2 \cdot 25\sqrt{3} = 450 + 50\sqrt{3} \approx 536{,}6$ см^2

Пример №2: Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60^0. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед

$AB = 8$ см

$AD = 15$ см

$\angle BAD = 60^0$

$S_{BB_1D_1D} = 130$ см^2

Найти: $S_{полн}$—?

Решение:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, BD является меньшей диагональю, т.к. лежит напротив острого угла в 60^0. Площадь любого параллелограмма можно найти по формуле: $S_{осн} = S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin(AB^\wedge AD) =$

$= 8 \cdot 15 \cdot \sin 60^0 = 120 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$ см^2

$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (8 + 15) = 46$ см $= P_{осн}$

Рассмотрим ΔABD. По теореме косинусов:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(AB^{\wedge}AD) =$

$= 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60^0 = 64 + 225 - 240 \cdot \frac{1}{2} = 289 - 120 = 169$

$BD = 13$ см

Рассмотрим BB_1D_1D – прямоугольник, т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед.

$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1$

$130 = 13 \cdot BB_1$

$BB_1 = \frac{130}{13}$

$BB_1 = 10$ см

$S_{бок} = P \cdot h = P_{ABCD} \cdot BB_1 = 46 \cdot 10 = 460$ см^2

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 460 + 2 \cdot 60\sqrt{3} = 460 + 120\sqrt{3}$ см^2

Ответ: $460 + 120\sqrt{3}$ см^2.

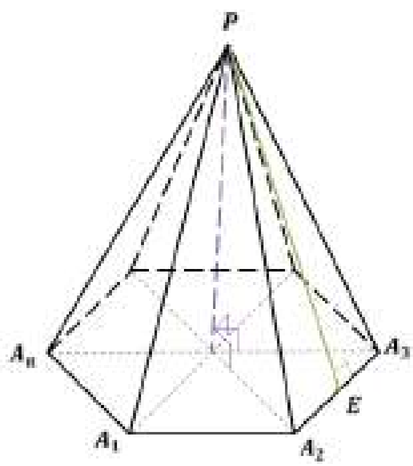
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 6-7.

Тема 11.5. Пирамида.

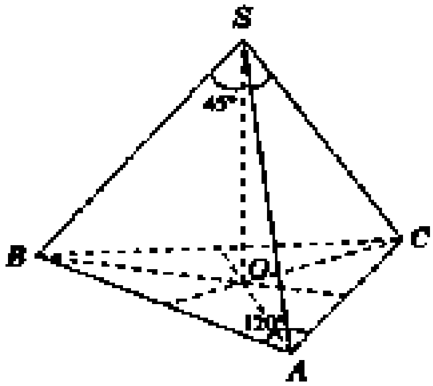
Цель: Познакомиться с определением пирамиды. Научиться изображать пирамиду, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять линейные элементы и углы пирамиды, аргументировать своих суждения.

Многогранник, составленный из n - угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и n треугольников, называется пирамидой. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется основанием, а треугольники — боковыми гранями пирамиды. Точка P – вершина, а отрезки $A_1P, A_2P, \dots, A_nP$ называются боковыми рёбрами пирамиды.



Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды.

Пример №1: Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 120^0. Боковые ребра образуют с ее высотой, равной 16 см, углы в 45^0. Найдите площадь основания пирамиды.



Дано:

$ABCS$ – пирамида

ΔABC – равнобедренный

$\angle CAB = 120^0$

$SO \perp (ABC)$

$SO = 16$ см

$\angle BSO = \angle ASO = \angle CSO = 45^0$

Найти: $S_{\Delta ABC}$—?

Решение:

Рассмотрим ΔBSO – прямоугольный.

$\angle SBO = 180^0 - \angle O - \angle BSO = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0 \Rightarrow$

$BO = SO = 16$ см

$\Delta ASO, \Delta BSO, \Delta CSO$ – прямоугольные, т.к. $SO \perp (ABC)$.

$\Delta ASO = \Delta BSO = \Delta CSO$ по катету и острому углу ($\angle O = 90^0$, SO - общий катет) $\Rightarrow AO = BO = CO = 16$ см .

Рассмотрим ΔABC – равнобедренный, значит $\angle B = \angle C = \frac{180^0 - 120^0}{2} = 30^0$ и $AB = AC$. $(\cdot)O$ – точка равноудалена от вершин $\Delta ABC \Rightarrow$ является центром описанной около него окружности.

По теореме синусов:

$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B} = 2R$, где R - это радиус описанной окружности вокруг ΔABC и $R = AO = 16$ см

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin 30^0} = 2 \cdot 16$$

$\frac{AB}{\frac{1}{2}} = 32$

$AB = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$ см $= AC$

Площадь любого треугольника можно найти по формуле:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(AB^{\wedge}AC) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \sin 120^0 = 128 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 64\sqrt{3}$ см^2

Ответ: $64\sqrt{3}$ см^2.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 8-9.

Тема 11.6. Правильная пирамида. Тетраэдр.

Цель: Познакомиться с определением правильной пирамиды и тетраэдра. Научиться изображать правильную пирамиду и тетраэдр, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять линейные элементы и углы правильной пирамиды и тетраэдра, аргументировать своих суждения.

Пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а вершина, которая проектируется в центр основания, называется правильной пирамидой.

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды называется апофемой.

Правильная треугольная пирамида, у которой все рёбра равны, называется тетраэдром.

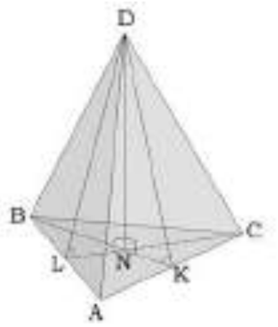
Все грани тетраэдра — равные равносторонние треугольники.

Правильная треугольная пирамида.

Основание правильной треугольной пирамиды — равносторонний треугольник.

Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения медиан.

Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения медиан: $\frac{BN}{NK} = \frac{2}{1}$



KD— апофема, $\angle NKD$и $\angle NLD$— двугранные углы при основании пирамиды, $\angle DCN$ и $\angle DBN$ — углы между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

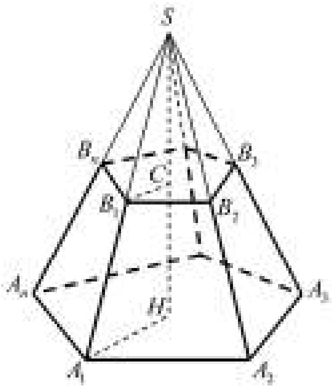
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 10-11.

Тема 11.7. Усеченная пирамида.

Цель: Познакомиться с определением усеченной пирамиды. Научиться изображать усеченную пирамиду, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять линейные элементы и углы усеченной пирамиды, аргументировать своих суждения.

Усеченная пирамида.



Свойства усеченной пирамиды:

Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.

Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды равны.

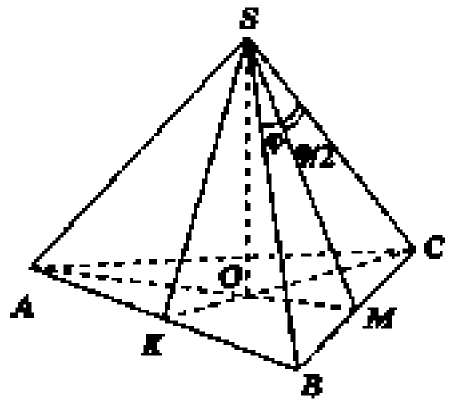
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 12-13.

Тема 11.8. Нахождение элементов пирамиды.

Цель: Научиться характеризовать и изображать сечения пирамиды, развертки многогранников, применять свойства симметрии при решении задач.

Пример №1: В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите высоту пирамиды.



Дано:

$ABCS$ – правильная пирамида

$AB = BC = AC = 8$ см

$\angle BSC = \varphi$

$SO \perp (ABC)$

Найти: $SO-?$

Решение:

Проведем медианы AM в ΔABC и SM в BSC.

Рассмотрим ΔABC – правильный. $BM = MC = 4$ см (т.к. AM – медиана, биссектриса и высота равнобедренного ΔABC) и $\angle A = \angle B = \angle C = 60^0$.

Рассмотрим ΔABM – прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin 60^0 = \frac{AM}{AB}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{8}$

$AM = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ см

$\frac{AO}{OM} = \frac{2}{1}$

AM – 3 части, а $OM - 1$ часть.

$4\sqrt{3}: 3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ см – 1 часть.

$OM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ см

Рассмотрим ΔBSC – равнобедренный. $BM = MC = 4$ см (т.к. SM – медиана, биссектриса и высота равнобедренного ΔBSC) и $\angle CSM = \angle BSM = \frac{\varphi}{2}$.

Рассмотрим ΔCSM – прямоугольный. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$$\operatorname{tg} \angle CSM = \frac{MC}{SM}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{SM}$$

$$SM \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 4$$

$$SM = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \text{ см}$$

Рассмотрим ΔSOM – прямоугольный (т.к. $SO \perp (ABC)$). По теореме Пифагора:

$$SM^2 = SO^2 + OM^2$$

$$\left(\frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}\right)^2 = SO^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$SO^2 = \frac{16}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{16 \cdot 3}{9}$$

$$SO^2 = \frac{16}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}$$

$$SO^2 = 16\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}\right)$$

$$SO = \sqrt{16\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}\right)}$$

$$SO = 4\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}\right)} \text{ см}$$

Ответ: $4\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}\right)}$ см.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 14-15.

Тема 11.9. Нахождение полной и боковой поверхности пирамиды.

Цель: Познакомиться с формулами полной и боковой поверхности пирамиды. Научиться вычислять площади боковой и полной поверхностей пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности пирамиды — сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h(\text{апофема})$$

Площадь полной поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему плюс площадь основания.

$$S_{\text{полн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot h(\text{апофема}) + S_{\text{осн}}$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_{1\text{ осн}} + P_{2\text{ осн}}) \cdot h(\text{апофема})$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_{1\text{ осн}} + P_{2\text{ осн}}) \cdot h(\text{апофема}) + S_{\text{осн}}$$

Пример №1: Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы 30° и 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

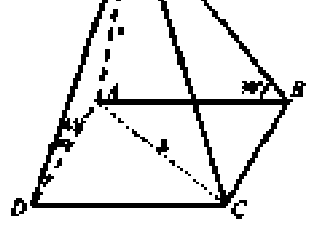
Дано:

$ABCDM$ – пирамида

$ABCD$ - прямоугольник

$AC = 8$ см

(MAD)^$(ABC) = 90^0$



$(MAB)^\wedge(ABC) = 90^0$

$(MDC)^\wedge(ABC) = 45^0$

$(MBC)^\wedge(ABC) = 30^0$

Найти: $S_{\text{полн}}$—?

Решение:

$$\left.\begin{matrix}(MAD)^\wedge(ABC) = 90^0\\ (MAB)^\wedge(ABC) = 90^0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(MAD) \perp (ABC) = 90^0\\ (MAB) \perp (ABC) = 90^0\\ (MAD) \cap (MAB)\end{matrix}\right\} \Rightarrow MA \perp (ABC) \Rightarrow$$

MA – высота пирамиды. $\angle MAD = \angle MAB = 90^0$.

$$\left.\begin{matrix}MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp\ AD\\ AD \perp DC\ (ABCD\ -\ \text{прямоугольник})\end{matrix}\right\} \Rightarrow MD \perp DC$$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$$\left.\begin{matrix}MD \perp DC\\ AD \perp DC\\ (MDC) \cap (ABC) = DC\end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle MDA = 45^0$$ — линейный угол двугранного угла $(MDC)^\wedge(ABC)$.

$$\left.\begin{matrix}MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp\ AB\\ AB \perp BC\ (ABCD\ -\ \text{прямоугольник})\end{matrix}\right\} \Rightarrow MB \perp BC$$ (по теореме о трёх перпендикулярах)

$$\left.\begin{matrix}MB \perp BC\\ AB \perp BC\\ (MBC) \cap (ABC) = BC\end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle MBA = 30^0$$ — линейный угол двугранного угла $(MBC)^\wedge(ABC)$.

Все боковые грани пирамиды – прямоугольные треугольники. Запишем формулы для вычисления их площадей.

$S_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} \cdot MA \cdot AD$

$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \cdot MA \cdot AB$

$S_{\Delta MDC} = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot DC$

$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot BC$

Пусть $MA = x$. $ABCD$ - прямоугольник $\Rightarrow AB = DC, AD = BC$

Рассмотрим ΔMAD – прямоугольный и равнобедренный с прямым углом $\angle A = 90^0, \angle AMD = \angle ADM = 45^0 \Longrightarrow MA = AD = BC = x$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin 45^0 = \frac{MA}{MD}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{MD}$

$\sqrt{2} \cdot MD = 2x$

$MD = \frac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$

Рассмотрим ΔMAB – прямоугольный с прямым углом $\angle A = 90^0$.

$\angle MBA = 30^0$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

$\sin 30^0 = \frac{MA}{MB}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{MB}$

$1 \cdot MB = 2x$

$MB = 2x$

$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{MA}{AB}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{AB}$

$\sqrt{3} \cdot AB = 3x$

$AB = \frac{3x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x = DC$

Рассмотрим ΔADC – прямоугольный с прямым углом $\angle D = 90^0$.

По теореме Пифагора:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$8^2 = x^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2$

$64^2 = x^2 + 3x^2$

$4x^2 = 64$

$x^2 = 16$

$x^2 = \sqrt{16}$

$x = 4$ см $= MA = AD = BC$, тогда $MB = 2 \cdot 4 = 8$, $AB = DC = 4\sqrt{3}$, $MD = 4\sqrt{2}$.

$S_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ см^2

$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ см^2

$S_{\Delta MDC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ см^2

$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ см^2

$S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = AD \cdot DC = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ см^2

$S_{\text{полн}} = S_{\Delta MAD} + S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MDC} + S_{\Delta MBC} + S_{ABCD} =$

$= 8 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 16 + 16\sqrt{3} = 24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6}$ см^2

Ответ: $24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6}$ см^2.

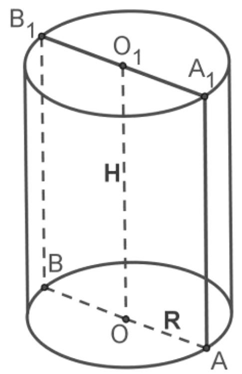
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 17 Призма и пирамида № 16-17.

Тема 12.1. Цилиндр.

Цель: Познакомиться с определением цилиндра. Научиться изображать цилиндр, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять площади боковой и полной поверхностей.

Цилиндр — это тело вращения, которое получается при вращении прямоугольника вокруг его стороны.



ABA_1B_1 — прямоугольник.

OO_1 — ось симметрии цилиндра и высота цилиндра.

AA_1 — образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра.

AO — радиус цилиндра.

Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги — основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

Если представить, что боковая цилиндрическая поверхность разрезана по образующей AA_1 и развёрнута, получаем прямоугольник. Сторона AA_1 равна высоте H, а другую сторону образует развёрнутая окружность основания длиной $2\pi R$.

Так как развёртка — прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле:

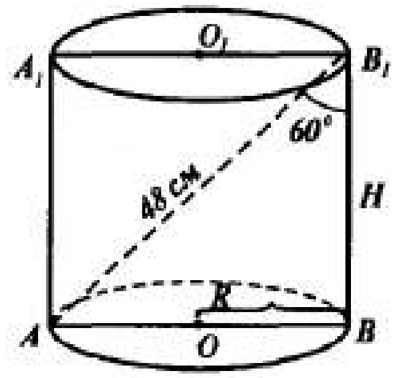
$$S_{\text{бок}} = 2\pi R \cdot H$$

Основания цилиндра — два круга с общей площадью $2\pi R^2$.

Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$$

Пример №1: Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60^0. Найдите: а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь основания цилиндра.



Дано:

цилиндр

AA_1B_1B — осевое сечение цилиндра

$AB_1 = 48$ см

$\angle AB_1B = 60^0$

Найти: а) H−? б) R−? в) $S_{\text{осн}}$−?

Решение:

Рассмотрим ΔAB_1B – прямоугольный. $AB_1 = 48$ см и $\angle B_1 = 60^0$. Из соотношений в прямоугольном треугольнике:

а) $\cos 60^0 = \frac{BB_1}{AB_1}$

$\frac{1}{2} = \frac{BB_1}{48}$

$BB_1 = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24$ см $= H$

б) $\sin 60^0 = \frac{AB}{AB_1}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{48}$

$AB = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$ см

$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ см

в) $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi\left(12\sqrt{3}\right)^2 = 144 \cdot 3\pi = 432\pi$ см^2

Ответ: а) 24 см б) $12\sqrt{3}$ см в) 432π см^2.

Пример №2: Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, а площадь основания — 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.

Дано:

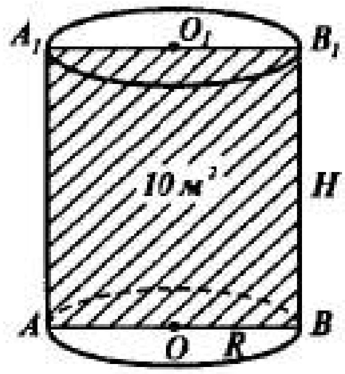
цилиндр

AA_1B_1B — осевое сечение цилиндра

$S_{\text{осев.сеч}} = 10 \text{ м}^2$

$S_{\text{осн}} = 5 \text{ м}^2$

Найти: $H-?$



Решение:

$S_{\text{осн}} = \pi R^2$

$5 = \pi R^2$

$R^2 = \frac{5}{\pi}$

$R = \sqrt{\frac{5}{\pi}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$ м

$S_{\text{осев.сеч}} = AB \cdot BB_1 = 2R \cdot H$

$10 = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \cdot H$

$H = \frac{10\sqrt{\pi}}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{5\pi}$ м

Ответ: $\sqrt{5\pi}$ м.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

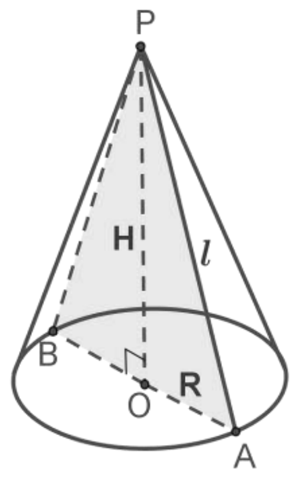
Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 1-3.

Тема 12.2. Конус.

Цель: Познакомиться с определением конуса. Научиться изображать конус, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять площади боковой и полной поверхностей.

Конус — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета.

Треугольник POA вращается вокруг стороны PO.



PO — ось конуса и высота конуса.

P — вершина конуса.

PA — образующая конуса.

Круг с центром O — основание конуса.

AO — радиус основания конуса.

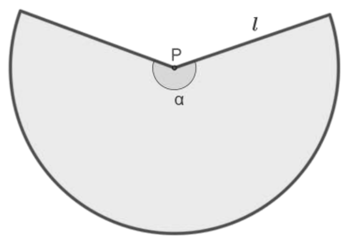
Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось PO конуса.

Осевое сечение конуса — это равнобедренный треугольник.

APB — осевое сечение конуса.

$\angle PAO = \angle PBO$ — углы между образующими и основанием конуса.

Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор. α — угол развертки конуса.



Радиус сектора — это образующая конуса.

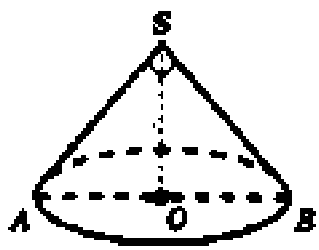
$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^0}$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

$$S_{\text{полн}} = \pi R l + \pi R^2$$

Пример №1: Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

Дано:



конус

ΔASB — осевое сечение конуса

$\angle ASB = 90^0$

$R = 5$ см

Найти: $S_{\text{осев.сеч}}$—?

Решение:

Рассмотрим ΔASB – прямоугольный и равнобедренный с прямым углом $\angle S = 90^0, \angle A = \angle B = \frac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$, $AB = 2R = 2 \cdot 5 = 10$ см. SO – медиана, биссектриса и высота ΔASB. По свойству медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника: $AO = OB = SO = R = 5$ см.

$S_{\text{осев.сеч}} = S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$ см^2

Ответ: 25 см^2.

Пример №2: Осевое сечение конуса - правильный треугольник со стороной $2r$. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен 30^0.

Дано:

конус

ΔAPB — осевое сечение конуса

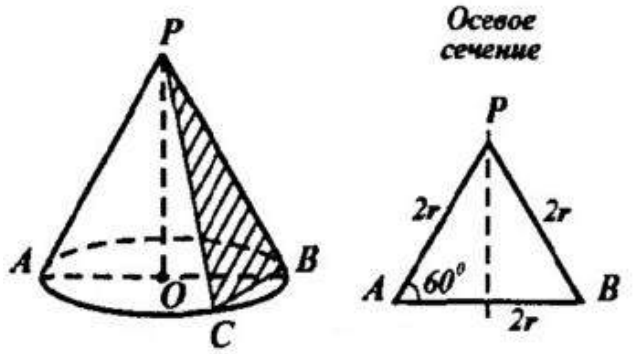
ΔAPB - правильный

$AB = 2r$

ΔCPB — сечение конуса

$\angle CPB = 30^0$

Найти: $S_{\text{сеч.}}$—?



Решение:

ΔAPB – правильный $\Rightarrow l = PA = PB = AB = PC = PB = 2r$, где l – образующая конуса. Площадь любого треугольника можно найти по формуле:

$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot PB \cdot \sin\angle CPB = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin 30^0 = r \cdot 2r \cdot \frac{1}{2} = r^2$

Ответ: r^2.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 7-8.

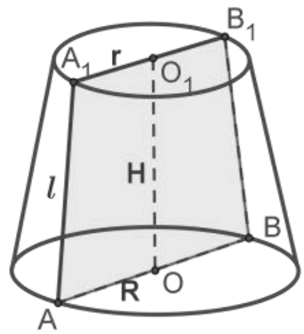
Тема 12.3. Усеченный конус.

Цель: Познакомиться с определением усеченного конуса. Научиться изображать усеченный конус, вычислять площади боковой и полной поверхностей.

Также усечённый конус можно рассматривать как тело вращения, которое образовалось в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны (которая перпендикулярна к основанию трапеции) или в результате вращения равнобедренной трапеции вокруг высоты, проведённой через серединные точки оснований трапеции.

OO_1 — ось конуса и высота конуса.

AA_1 — образующая конуса.



Круги с центрами O и O_1 — основания усечённого конуса.

AO и A_1O_1 — радиусы оснований конуса.

Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось OO_1 конуса.

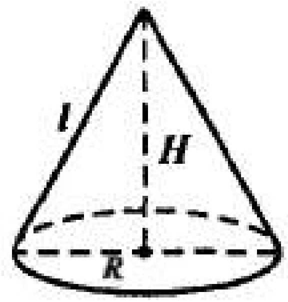
Осевое сечение конуса — это равнобедренная трапеция.

AA_1B_1B — осевое сечение конуса.

$$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r)$$

$$S_{\text{полн}} = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$$

Пример №1: Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой α. Найдите α, если высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см.



Дано:

конус

α — угол развертки конуса

$R = 3$ см

$H = 4$ см

Найти: $\alpha -?$

Решение:

Приравняем две формулы $S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^0}$ и $S_{\text{бок}} = \pi Rl$, затем выразим α:

$\frac{\pi l^2 \alpha}{360^0} = \pi Rl$

$\alpha = \frac{\pi Rl \cdot 360^0}{\pi l^2} = \frac{R \cdot 360^0}{l}$

Найдем образующую конуса l по теореме Пифагора:

$l^2 = R^2 + H^2$

$l^2 = 3^2 + 4^2$

$l^2 = 9 + 16$

$l^2 = 25$

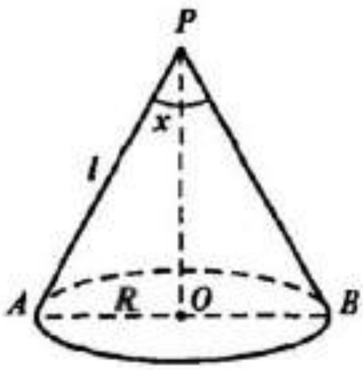
$l = \sqrt{25}$

$l = 5$ см

$\alpha = \frac{3 \cdot 360^0}{5} = 216^0$

Ответ: 216^0

Пример №2: Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если разверткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной 180^0.



Дано:

Конус

α — угол развертки конуса

$\alpha = 180^0$

ΔAPB — осевое сечение конуса

Найти: $\angle APB - ?$

Решение:

Пусть $\angle APO = 2x$, тогда $\angle APB = 2x$.

Рассмотрим ΔAPB – прямоугольный.

$\sin x = \frac{AO}{AP} = \frac{R}{l}$

Приравняем две формулы $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^0}$ и $S_{бок} = \pi R l$, затем выразим R:

$\pi \cdot R \cdot l = \frac{\pi \cdot l^2 \cdot \alpha}{360^0}$

$R = \frac{\pi \cdot l^2 \cdot \alpha}{360^0 \cdot \pi \cdot l} = \frac{l \cdot \alpha}{360^0} = \frac{l \cdot 180^0}{360^0} = \frac{l}{2}$

$\sin x = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$

$x = 30^0 = \angle APO$

$\angle APB = 2x = 2 \cdot 30^0 = 60^0$

Ответ: 60^0.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

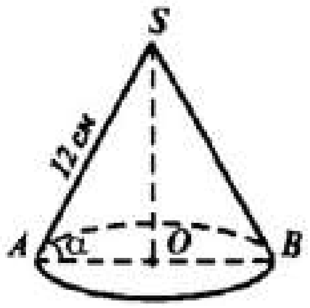
Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 13.

Тема 12.4. Нахождение высоты, радиуса, образующей цилиндра и конуса.

Цель: Научиться вычислять линейные элементы и углы цилиндра и конуса, изображать простейшие сечения, аргументировать своих суждения, характеризовать и изображать сечения, развертки.

Пример №1: Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите площадь основания конуса.

Дано:



Конус

$AS = 12$ см

$\angle A = 30^0$

Найти: $S_{осн}$–?

Решение:

$S_{осн} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot AO^2$

Рассмотрим ΔAOS – прямоугольный.

$\cos 30^0 = \frac{AO}{AS}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AO}{12}$

$2 \cdot AO = 12 \cdot \sqrt{3}$

$AO = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см

$S_{осн} = \pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 = \pi \cdot 36 \cdot 3 = 108\pi$ см^2

Ответ: 108π см^2.

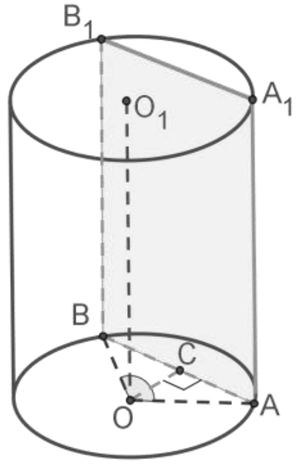
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 6,10-12

Тема 12.5 Осевые сечения, параллельные основанию сечения в цилиндре и конусе.

Цель: Научиться изображать простейшие сечения, аргументировать своих суждения, характеризовать и изображать сечения, развертки.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т.е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник.



Площадь поверхности цилиндра.

На рисунке изображён цилиндр, пересечённый плоскостью, которая параллельна оси цилиндра OO_1.

ABA_1B_1 — прямоугольник.

$AO = BO = R$ — радиусы.

CO — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

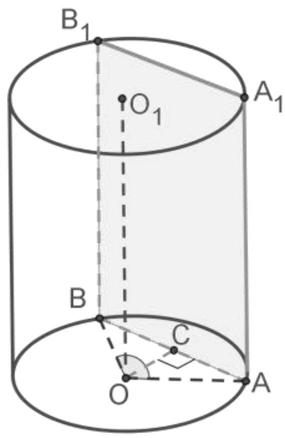
Дуга AB равна центральному углу $\angle AOB$.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию, в сечении получаем круг, равный основаниям цилиндра.

Пример №1: Высота цилиндра равна 8 см, радиус равен 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 3 см.

Дано:

цилиндр



AA_1B_1B — сечение цилиндра параллельного его оси

$AA_1 = 8$ см

$AO = 5$ см

$OC = 3$ см

Найти: $S_{AA_1B_1B}$—?

Решение:

ABA_1B_1 — прямоугольник.

$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB$

Рассмотрим ΔAOC – прямоугольный с прямым углом $\angle C = 90^0$.

По теореме Пифагора:

$AO^2 = OC^2 + AC^2$

$5^2 = 3^2 + AC^2$

$AC^2 = 25 - 9$

$AC^2 = 16$

$AC = \sqrt{16}$

$AC = 4$ см

$AB = 2AC = 2 \cdot 4 = 8$ см

$S_{AA_1B_1B} = 8 \cdot 8 = 64$ см^2

Ответ: 64 см^2.

Пример №2: Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислить площадь полной поверхности конуса.

Дано:

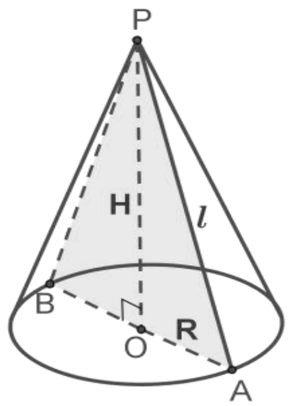
конус

ΔAPB — осевое сечение конуса

$S_{\Delta APB} = 0,6$ см^2

$PO = 1,2$ см

Найти: $S_{\text{полн}}$–?



Решение:

$S_{\text{полн.}} = \pi \cdot R \cdot l + \pi \cdot R^2$

ΔAPB – равнобедренный ⇒ PO – биссектриса, медиана и высота.

$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PO$

$0,6 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot AB$

$0,6 = 0,6 \cdot AB$

$AB = 1$ см

$AO = R = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0,5$ см

Рассмотрим ΔAOP – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AP^2 = AO^2 + PO^2$

$AP^2 = 0,5^2 + 1,2^2$

$AP^2 = 0,25 + 1,44$

$AP^2 = 1,69$

$AP = \sqrt{1,69}$

$AP = 1,3$ см $= l$

$S_{\text{полн.}} = \pi \cdot 0,5 \cdot 1,3 + \pi \cdot 0,5^2 = 0,65\pi + 0,25\pi = 0,9\pi$ см^2.

Ответ: $0,9\pi$ см^2.

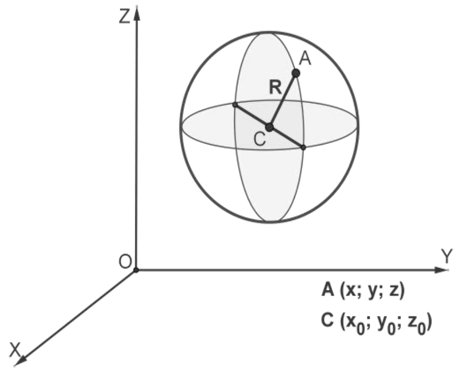
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 4-5,9.

Тема 12.6. Сфера и шар.

Цель: Познакомиться с определением сферы и шара, уравнением сферы в пространстве. Научиться изображать сферу и шар, выполнять рисунки по условиям задач, вычислять площадь сферы.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки.



Поверхность шара называется сферой.

Уравнение сферы:

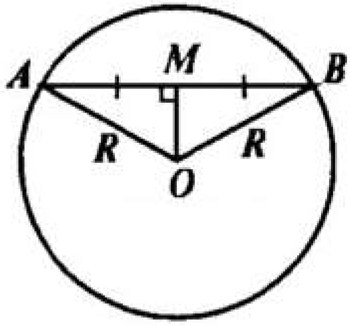
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Площадь поверхности сферы вычисляется по формуле:

$S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.

Пример №1: Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. Докажите, что если M — середина отрезка AB, то $OM \perp AB$.

Дано:



сфера

$AO = OB = R$

$O \notin AB$

$M \in AB$

M — середина AB

Доказать: $OM \perp AB$

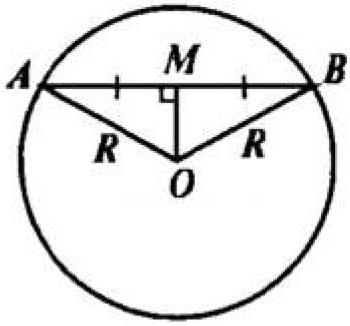
Доказательство:

$S_{\text{полн.}} = \pi \cdot R \cdot l + \pi \cdot R^2$

ΔAOB – равнобедренный (т.к. по условию $AO = OB = R$). M — середина $AB \Rightarrow OM$ – медиана ΔAOB , по свойству медианы равнобедренного треугольника $OM \perp AB$.

Пример №2: Точка M — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O. Найдите OM, если $R = 50$ см, $AB = 40$ см.

Дано:



сфера

$AO = OB = R$

$O \notin AB$

$M \in AB$

M — середина AB

$R = 50$ см

$AB = 40$ см

Найти: $OM-?$

Решение:

ΔAOB – равнобедренный (т.к. по условию $AO = OB = R$). M — середина $AB \Rightarrow OM$ – медиана $\Delta AOB \Rightarrow AM = AB = 20$ см , по свойству медианы равнобедренного треугольника $OM \perp AB$.

Рассмотрим ΔAOM – прямоугольный (т.к. $OM \perp AB$). По теореме Пифагора:

$AO^2 = AM^2 + OM^2$

$50^2 = 20^2 + OM^2$

$OM^2 = 2500 - 400$

$OM^2 = 2100$

$OM = \sqrt{2100}$

$OM = \sqrt{21 \cdot 100}$

$OM = 10\sqrt{21}$ см

Ответ: $10\sqrt{21}$ см.

Пример №3: Напишите уравнение сферы радиуса R с центром A, если $A(2; -4; 7)$, $R = 3$.

Уравнение сферы:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$(x - 2)^2 + \left(y - (-4)\right)^2 + (z - 7)^2 = 3^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 9$$

Пример №4: Напишите уравнение сферы с центром A, проходящей через точку N, если $A(-2; 2; 0)$, $N(5; 0; -1)$.

Расстояние между двумя точками, если даны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, можно найти по формуле:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, тогда

$$R = \left|\overrightarrow{AN}\right| = \sqrt{\left(5 - (-2)\right)^2 + (0 - 2)^2 + (-1 - 0)^2} =$$

$$= \sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 4 + 1} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$$

Уравнение сферы:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$\left(x - (-2)\right)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 = \left(3\sqrt{6}\right)^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 54$$

Пример №5: Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

Уравнение сферы:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Представим данное нам уравнение сферы в общем виде:

Уравнение сферы:

$(x - 0)^2 + (y - 0_0)^2 + (z - 0)^2 = 7^2$, тогда $A(0; 0; 0)$, $R = 7$.

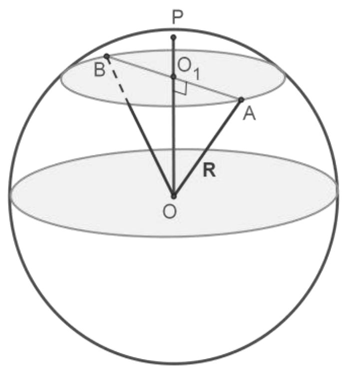
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 14-18.

Тема 12.7. Взаимное расположение сферы и плоскости.

Цель: Познакомиться с видами взаимного расположения сферы и плоскости. Научиться вычислять площади сечений шара, в зависимости от расстояния между центром шара и плоскостью сечения.

Взаимное расположение сферы и плоскости:



$OO_1 = d$ — расстояние между центром шара и плоскостью сечения.

$AO = R$ — радиус шара.

AO_1 — радиус окружности сечения.

1) $d < r$, сечением является окружность.

2) $d > r$, плоскость не имеют общих точек со сферой.

3) $d = r$, плоскость касается окружности в точке.

Теорема 1: Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема 2: Если радиус сферы, перпендикулярен к плоскости, проходящей через конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Пример №1: Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите: площадь S сечения, если $R = 12$ см, $d = 8$ см.

Дано:

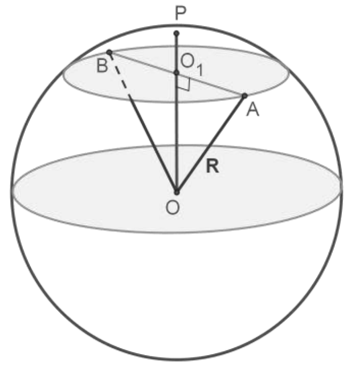
шар

$OO_1 \perp AB$

$OO_1 = d$

$d = 8$ см

$R = 12$ см



Найти: $S_{\text{сеч}}$–?

Решение:

$d < R \Rightarrow$ сечением является окружность.

Рассмотрим ΔAOO_1 – прямоугольный (т.к. $OO_1 \perp AB$), $AO = R = 12$ см. По теореме Пифагора:

$AO^2 = {OO_1}^2 + O_1A^2$

$12^2 = 8^2 + O_1A^2$

$O_1A^2 = 144 - 64$

$O_1A^2 = 80$

$O_1A = \sqrt{80}$

$O_1A = \sqrt{16 \cdot 5}$

$O_1A = 4\sqrt{5}$ см

$S_{\text{сеч}} = \pi \cdot O_1A^2 = \pi\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 80\pi$ см^2

Ответ: 80π см^2.

Пример №2: Найдите площадь сферы, радиус которой равен: 6 см.

Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2 = 4\pi 6^2 = 4 \cdot 36 \cdot \pi = 144\pi$ см^2.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 18 Цилиндр. Конус. Сфера и шар № 19-22.

Тема 13.1. Понятие объема.

Цель: Познакомиться с понятием объема и его свойствами, вспомнить объём простейших фигур.

Объём — количественная характеристика пространства, занимаемого телом или веществом.

Эту характеристику можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов.

Единицей измерения объемов будем считать куб, ребро которого равно единице измерения длины. В СИ основная единица измерения объёма — кубический метр. Кубический метр — куб, ребро которого равно 1м.

Свойства объемов:

1. Объем тела есть неотрицательное число.

2. Равные геометрические тела имеют равные объемы.

3. Если геометрическое тело составлено из геометрических тел, не имеющих общих внутренних точек, то объем данного тела равен сумме объемов тел его составляющих.

Пример №1: Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h, если: $a = 11, b = 12, h = 15$.

$V = a \cdot b \cdot h = 11 \cdot 12 \cdot 15 = 1980$.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

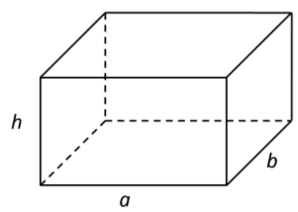
Практическая работа № 19 Объемы тел № 1.

Тема 13.2. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда.

Цель: Познакомиться с формулами объема куба, прямоугольного параллелепипеда. Научиться вычислять объемы куба, прямоугольного параллелепипеда, решать задачи на применение формул вычисления объемов пространственных тел.

Параллелепипед — призма, основанием которой является параллелограмм.

Прямой параллелепипед — это параллелепипед, у которого 4 боковые грани — прямоугольники.



Куб — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Частный случай параллелепипеда и призмы.

Прямоугольный параллелепипед — это прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник.

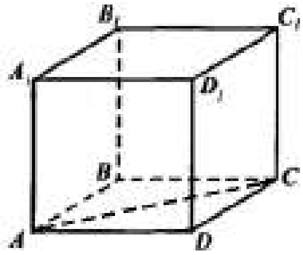
Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты: $V = a \cdot b \cdot h$ или $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

a, b — стороны основания параллелепипеда

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания параллелепипеда

h — высота параллелепипеда

Пример №1: Найдите объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ если $AC = 12$ см.



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

$AC = 12$ см

Найти: $V-?$

Решение:

$V = a^3$

Т.к. $ABCD$ – куб, значит $AD = DC$ и ΔADC – прямоугольный с прямым углом $\angle D = 90^0$. Пусть $AD = DC = a$. По теореме Пифагора:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$12^2 = a^2 + a^2$

$144 = 2a^2$

$a^2 = 72$

$a = \sqrt{72}$

$a = \sqrt{36 \cdot 2}$

$a = 6\sqrt{2}$ см

$V = a^3 = \left(6\sqrt{2}\right)^3 = 216\sqrt{8} = 216\sqrt{4 \cdot 2} = 216 \cdot 2\sqrt{2} = 432\sqrt{2}$ см^3

Ответ: $432\sqrt{2}$ см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 2.

Тема 13.3. Объем цилиндра.

Цель: Познакомиться с формулой объема цилиндра. Научиться вычислять объем цилиндра, решать задачи на применение формул вычисления объемов тел вращения.

Объём цилиндра: $V = \pi R^2 H$

R — радиус цилиндра

H — высота цилиндра

Пример №1: Пусть V , r и h соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите h, если $r = h, V = 8\pi$ см^3.

$V = \pi r^2 h$

$8\pi = \pi h^2 h$

$\pi h^3 = 8\pi$

$h^3 = 8$

$h = \sqrt[3]{8}$

$h = 2$ см

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 6.

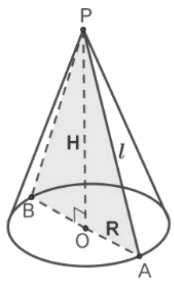
Тема 13.4. Объем конуса.

Цель: Познакомиться с формулой объема конуса. Научиться вычислять объем конуса, решать задачи на применение формул вычисления объемов тел вращения.

Объём конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

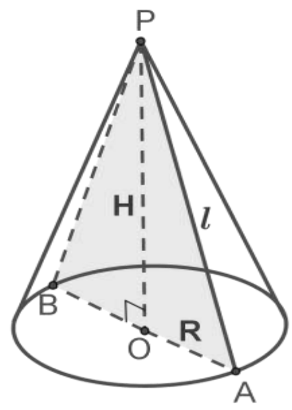
R — радиус конуса

H — высота конуса



Пример №1: Найдите объем конуса, если его образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения равна 60 см^2.

Дано:



конус

ΔAPB — осевое сечение конуса

$S_{\Delta APB} = 60$ см^2

$l = AP = BP = 13$ см

Найти: $V-?$

Решение:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

ΔAPB – равнобедренный $\Rightarrow$ PO – биссектриса, медиана и высота.

$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PO$

$60 = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot H$

$RH = 60$

Рассмотрим ΔAOP – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AP^2 = AO^2 + PO^2$

$13^2 = R^2 + H^2$

$R^2 + H^2 = 169$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} RH = 60 \\ R^2 + H^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \frac{60}{H} \\ \left(\frac{60}{H}\right)^2 + H^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} RH = 60 \\ \frac{3600}{H^2} + H^2 = 169 \end{cases}$$

$\frac{3600+H^4}{H^2} = 169$

$3600 + H^4 = 169H^2$

$H^4 - 169H^2 + 3600 = 0$

Введем замену переменной: $H^2 = t$

$t^2 - 169t^2 + 3600 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-169)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3600 = 28561 - 14400 = 14161$

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{169+\sqrt{14161}}{2\cdot1} = \frac{169+119}{2} = \frac{288}{2} = 144$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{169-\sqrt{14161}}{2\cdot1} = \frac{169-119}{2} = \frac{50}{2} = 25$

$H^2 = 144$	$H^2 = 25$
$H = 12$ см	$H = 5$ см
$R = \frac{60}{12} = 5$ см	$R = \frac{60}{5} = 12$ см
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi$ см^3	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5 = 240\pi$ см^3

Ответ: 100π см^3 или 240π см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 11.

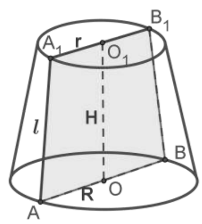
Тема 13.5. Объем усеченного конуса.

Цель: Познакомиться с формулой объема усеченного конуса. Научиться вычислять объем усеченного конуса, решать задачи на применение формул вычисления объемов тел вращения.

Объём усечённого конуса: $V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$

H — высота конуса

S_1, S_2 — площади оснований конуса



Пример №1: Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, α параллельная основанию. Найдите объем исходного конуса, если объем меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

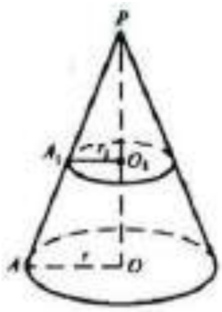
Дано:

конус

$H = PO = 5$ см

$PO_1 = 2$ см

α – плоскость основания конуса



β – плоскость сечения конуса

$\alpha \parallel \beta$

$V_{\text{отсекаемого конуса}} = 24 \text{ см}^3$

Найти: $V_{\text{исходного конуса}}$—?

Решение:

$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow AO \parallel A_1O_1$.

$\Delta AOP \sim \Delta A_1O_1P$ по 1 признаку подобия треугольников ($\angle APO$ – общий, $\angle O = \angle O_1$ как соответственные углы при $AO \parallel A_1O_1) \Longrightarrow \frac{OO_1}{PO} = \frac{2}{5} = k$

k – коэффициент подобия.

$V_{\text{исходного конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,\ V_{\text{отсекаемого конуса}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Из подобия треугольников следует: $r = \frac{2}{5}R, h = \frac{2}{5}H.$

$$V_{\text{отсекаемого конуса}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}R\right)^2 \cdot \frac{2}{5}H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}\right)^3 R^2H$$

$$\frac{V_{\text{отсекаемого конуса}}}{V_{\text{исходного конуса}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}\right)^3 R^2H}{\frac{1}{3}\pi R^2H} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\frac{24}{V_{\text{исходного конуса}}} = \frac{8}{125}$$

$$8 \cdot V_{\text{исходного конуса}} = 125 \cdot 24$$

$$V_{\text{исходного конуса}} = \frac{125 \cdot 24}{8} = 375 \text{ см}^3$$

Ответ: 375 см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 12.

Тема 13.6. Вычисление объемов куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра и конуса.

Цель: Закрепить навыки вычисления объемов пространственных тел и тел вращения.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 3.

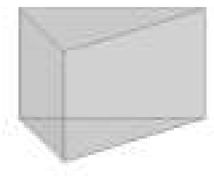
Тема 13.7. Объем прямой и наклонной призмы.

Цель: Познакомиться с формулами объема прямой и наклонной призмы. Научиться вычислять объемы прямой и наклонной призмы, решать задачи на применение формул вычисления объемов многогранников.

Объём прямой и наклонной призмы: $V = S_{\text{осн}} \cdot H$

H — высота призмы

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания призмы



Пример №1: Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если: $\angle AB_1C = 60^0$, $AB_1 = 3$ см, $CB_1 = 2$ см и двугранный угол с ребром BB_1 прямой.

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма

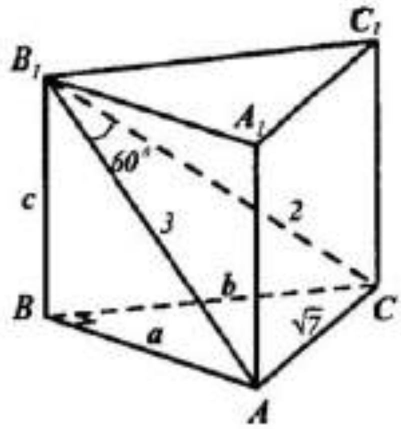
$\angle AB_1C = 60^0$

$AB_1 = 3$ см

$CB_1 = 2$ см

$\angle ABB_1C_1 = 90^0$

Найти: $V-?$



Решение:

$V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot BB_1$

Рассмотрим ΔAB_1C. По теореме косинусов:

$AC^2 = AB_1{}^2 + CB_1{}^2 - 2 \cdot AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos \angle AB_1C =$

$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^0 = 9 + 4 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7$

$AC = \sqrt{7}$ см

$\left.\begin{array}{r} AB \perp BB_1 \\ BC \perp BB_1 \\ (ABB_1A_1) \cap (CBB_1C_1) = BB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABC = 90^0$ — линейный угол двугранного угла ABB_1C_1.

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$.

Рассмотрим ΔABC – прямоугольный с прямым углом $\angle B = 90^0$.

По теореме Пифагора:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = a^2 + b^2$

$AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$

Рассмотрим ΔABB_1 – прямоугольный с прямым углом $\angle B = 90^0$.

По теореме Пифагора:

${AB_1}^2 = AB^2 + {BB_1}^2$

${AB_1}^2 = a^2 + c^2$

$AB_1 = \sqrt{a^2 + c^2} = 3$

Рассмотрим ΔABB_1 – прямоугольный с прямым углом $\angle B = 90^0$.

По теореме Пифагора:

${CB_1}^2 = BC^2 + {BB_1}^2$

${CB_1}^2 = b^2 + c^2$

$CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7} \\ \sqrt{a^2 + c^2} = 3 \\ \sqrt{b^2 + c^2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 + c^2 = 9 \\ b^2 + c^2 = 4 \end{cases}$$

$b^2 = 7 - a^2$

$c^2 = 9 - a^2$

$7 - a^2 + 9 - a^2 = 4$

$-2a^2 = 4 - 7 - 9$

$-2a^2 = -12$

$a^2 = 6$

$a = \sqrt{6}$ см $= AB$

$b^2 = 7 - a^2 = 7 - 6 = 1$

$b = 1$ см $= BC$

$c^2 = 9 - a^2 = 9 - 6 = 3$

$c = \sqrt{3}$ см $= BB_1$

$S_{осн} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ см^2

$V = S_{\Delta ABC} \cdot BB_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ см^3

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см^3.

Пример №2: Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 7$ см и $AC = 24$ см. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найдите объем призмы, если ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол в 45^0.

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма

ΔABC – прямоугольный

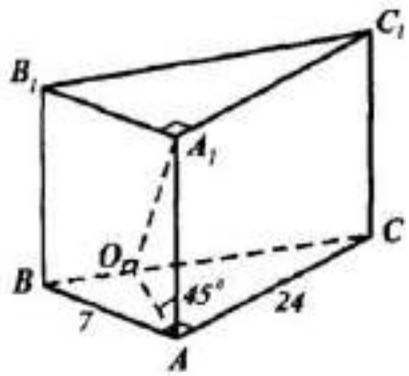
$AB = 7$ см

$AC = 24$ см

$A_1A = A_1B = A_1C$

AA_1^$(ABC) = 45^0$

Найти: V–?



Решение:

Рассмотрим ΔABC – прямоугольный с прямым углом $\angle A = 90^0$. По теореме Пифагора:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 7^2 + 24^2$

$BC^2 = 49 + 576$

$BC^2 = 625$

$BC = \sqrt{625}$

$BC = 25$ см

Т.к. $A_1A = A_1B = A_1C$, $(\cdot)A_1$ проецируется в $(\cdot)O$ – центр окружности, описанной вокруг $\Delta ABC \Rightarrow A_1O \perp (ABC) \Rightarrow A_1O$ – высота призмы. Для прямоугольного ΔABC центр описанной окружности середина гипотенузы BC. OA – медиана ΔABC. По свойству медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника: $BO = OC = AO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$ см.

Рассмотрим ΔAOA_1 – прямоугольный с прямым углом $\angle O = 90^0$, $AA_1\hat{}(ABC) = \angle A_1AO = 45^0$.

$\angle AA_1O = 180^0 - \angle O - \angle A_1AO = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0 \Longrightarrow \Delta AOA_1$ является равнобедренным, т.е. $AO = A_1O = 12{,}5$ см.

$V = S_{осн} \cdot H = S_{\Delta ABC} \cdot A_1O$

$S_{осн} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 = 84$ см^2

$V = S_{\Delta ABC} \cdot A_1O = 84 \cdot 12{,}5 = 1050$ см^3

Ответ: 1050 см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 4-5,7.

Тема 13.8. Объем пирамиды.

Цель: Познакомиться с формулой объема пирамиды. Научиться вычислять объем пирамиды, решать задачи на применение формул вычисления объемов многогранников.

Объём пирамиды: $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$

H — высота пирамиды

$S_{осн}$ — площадь основания пирамиды

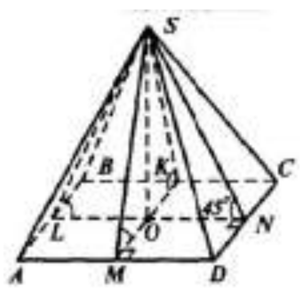
Пример №1: Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 см. Каждый из двугранных углов при основании равен 45^0. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 1,5 см.

Дано:

$ABCDS$ – пирамида

$ABCD$ – ромб

$AB = BC = CD = AD = 6$ см



все двугранные углы $\alpha = 45^0$

$SO = 1{,}5$ см

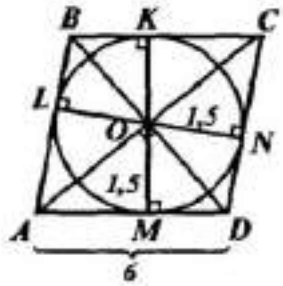
Найти: $V-?$

Решение:

Все двугранные углы при основании равны $\Longrightarrow$ все грани наклонены под одним углом $\Longrightarrow$ вершина пирамиды проецируется в центр вписанной окружности.

Рассмотрим ромб $ABCD$. Для ромба центром является точка пересечения диагоналей $AC \cap BD = O, SO \perp (ABCD)$. Построим перпендикуляр $ON \perp CD$, $(\cdot)N$ – точка касания вписанной в ромб окружности.

$$\left.\begin{matrix} SO \perp (ABCD) \Longrightarrow SO \perp ON \\ ON \perp CD \end{matrix}\right\} \Longrightarrow SN \perp CD$$ (по теореме о трёх перпендикулярах)



$$\left.\begin{matrix} SN \perp CD \\ ON \perp CD \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \angle SNO = 45^0$$ линейный угол двугранного угла $SCDO$ (угла при основании).

Рассмотрим ΔSON – прямоугольный с прямым углом $\angle O = 90^0$, $\angle SNO = 45^0$.

$\angle NSO = 180^0 - \angle O - \angle SNO = 180^0 - 90^0 - 45^0 = 45^0 \Longrightarrow \Delta SON$ является равнобедренным, т.е. $SO = ON = 1{,}5$ см.

Высота ромба равна диаметру окружности: $LN = 2ON = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ см.

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} S_{\Delta ABCD} \cdot SO$

$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABCD} = CD \cdot LN = 6 \cdot 3 = 18$ см^2

$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 1{,}5 = 9$ см^3

Ответ: 9 см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 8.

Тема 13.9. Объем усеченной пирамиды.

Цель: Познакомиться с формулой объема усеченной пирамиды. Научиться вычислять объем усеченной пирамиды, решать задачи на применение формул вычисления объемов многогранников.

Объём усечённой пирамиды: $V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$

h — высота усечённой пирамиды

S_1, S_2 — площади оснований усечённой пирамиды

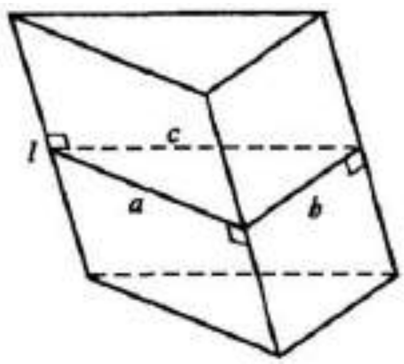
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 9.

Тема 13.10. Вычисление объемов прямой, наклонной призмы и пирамиды, конуса.

Цель: Закрепить навыки вычисления объемов пространственных тел и тел вращения.

Пример №1: Найдите объем наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2.



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма

ΔABC – прямоугольный

$a = 13$ см

$b = 30$ см

$c = 37$ см

$S_{\text{бок}} = 480$ см^2

Найти: $V-?$

Решение:

$S_{\text{бок}} = P \cdot h = P \cdot l$

$P = 13 + 30 + 37 = 80$ см

$480 = 80 \cdot l$

$l = 6$ см

По формуле Герона найдем площадь треугольника:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$

$p = \frac{13+30+37}{2} = \frac{80}{2} = 40$

$S_{\text{бок}} = P \cdot h = P \cdot l$

$S = \sqrt{40(40-13)(40-30)(40-37)} = \sqrt{40 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 3} = \sqrt{32400} =$

$= 180 \text{ см}^2 = S_{\text{осн}}$

$V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot l = 180 \cdot 6 = 1080 \text{ см}^3$

Ответ: 1080 см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 10.

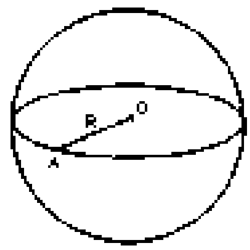
Тема 13.11. Объем шара, площадь сферы.

Цель: Познакомиться с формулой объема шара. Научиться вычислять объем шара, решать задачи на применение формул вычисления объемов тел вращения, закрепить методы вычисления площади поверхности сферы.

Площадь поверхности шара (т.е. сферы): $S = 4\pi R^2$

Объём шара вычисляется: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

R — радиус шара



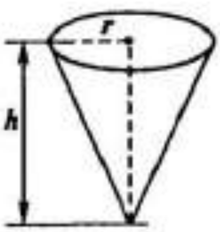
Пример №1: Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

Дано:

конус и 2 полушария (шар)

$h = 12$ см

$D = 5$ см



$d = 5$ см

Найти: Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает, т.е. $V_{\text{конуса}} - V_{\text{шара}}$—?

Решение:

2 полушария образуют шар $d = 2r = 5 \Rightarrow r = 2{,}5$ см.

$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(2{,}5)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 15{,}625 = \frac{62{,}5}{3}\pi$ см^3

В конусе: $D = 2R \Rightarrow R = 2{,}5$ см

$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi(2{,}5)^2 \cdot 12 = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25 \cdot 12 = 25\pi$ см^3

$V_{\text{конуса}} - V_{\text{шара}} = 25\pi - \frac{62{,}5}{3}\pi = \frac{75-62{,}5}{3}\pi = \frac{12{,}5}{3}\pi$ см$^3 > 0$ не переполнит.

Ответ: мороженое не переполнит стаканчик.

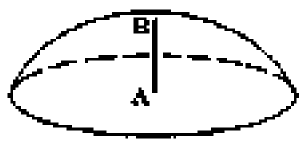
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 13 (а).

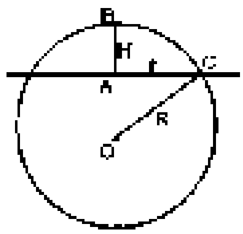
Тема 13.12. Объем шарового слоя.

Цель: Познакомиться с формулой шарового слоя. Научиться вычислять объем шарового слоя.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.



Круг с центром A — основание шарового сегмента.



$AC = r$ — радиус основания шарового сегмента,

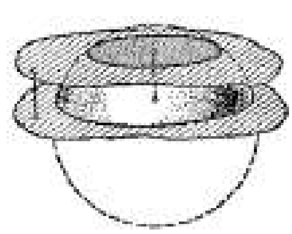
$AB = H$ — высота шарового сегмента,

$OC = R$ — радиус шара.

Объём шарового сегмента: $V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$,

где R — радиус шара,

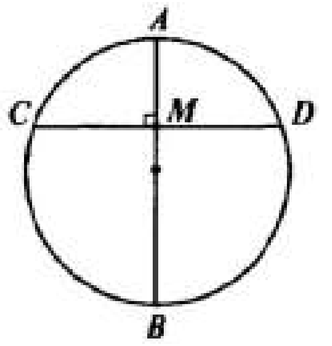
H — высота шарового сегмента.



Шаровым слоем называется часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями.

Объём шарового слоя можно найти как разность объёмов двух шаровых сегментов.

Пример №1: В шаре проведена плоскость, перпендикулярная к диаметру и делящая его на части 6 см и 12 см. Найдите объемы двух полученных частей шара.



Дано:

шар

AB — диаметр

α — секущая плоскость

$\alpha \perp AB$

$AM = 6$ см

$MB = 12$ см

Найти: V_1, V_2—?

Решение:

Проведем $CD \subset \alpha$.

$\left.\begin{matrix} CD \subset \alpha \\ \alpha \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp AB$

$AB = AM + MB = 6 + 12 = 18$ см

$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ см

$V_1 = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) = \pi \cdot 6^2 \left(9 - \frac{6}{3}\right) = 36 \cdot 7\pi = 252$ см^3

$V_2 = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) = \pi \cdot 12^2 \left(9 - \frac{12}{3}\right) = 144 \cdot 5\pi = 720$ см^3

Ответ: 252 см^3 и 720 см^3.

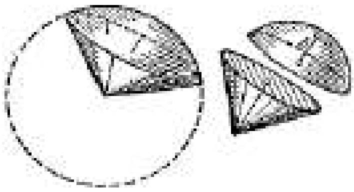
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 13 (б).

Тема 13.13. Объем шарового сектора.

Цель: Познакомиться с формулой шарового сектора. Научиться вычислять объем шарового сектора.

Шаровой сектор – это часть сферы или шара, которая ограничена кривой поверхностью шарового сегмента и поверхностью конической.



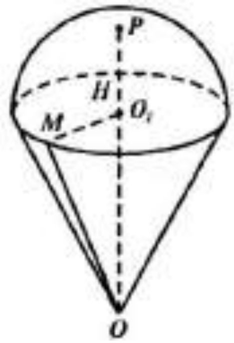
Вершиной в данном случае будет служить центр шара, основанием сегмента является та самая коническая поверхность.

Объем шарового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$,

R — радиус шара,

H — высота шарового сегмента.

Пример №1: Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности основания соответствующего шарового сегмента равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.



Дано:

шаровой сектор

$r = O_1M = 60$ см

$R = OM = OP = 75$ см

Найти: $V-?$

Решение:

Рассмотрим ΔOO_1M – прямоугольный с прямым углом $\angle O_1 = 90^0$.

По теореме Пифагора:

$OM^2 = {OO_1}^2 + O_1M^2$

$75^2 = {OO_1}^2 + 60^2$

${OO_1}^2 = 5625 + 3600$

${OO_1}^2 = 2025$

$OO_1 = \sqrt{2025}$

$OO_1 = 45$ см

$H = O_1P = OP - OO_1 = 75 - 45 = 30$ см

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 20 \cdot 5625\pi = 112500\pi$ см^3

Ответ: 112500π см^3.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 19 Объемы тел № 13 (в).

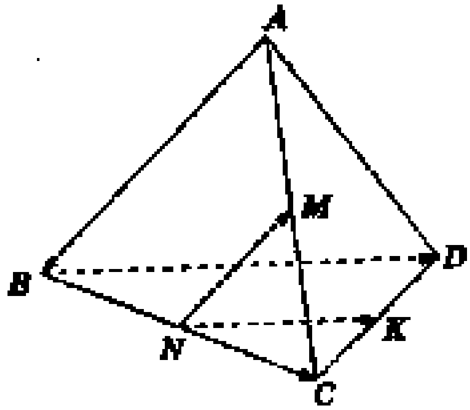
Тема 14.1. Векторы в пространстве.

Цель: Познакомиться с понятиями вектора и видами их расположения относительно друг друга в пространстве. Научиться определять пары равных, коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов.

Вектором называется направленный отрезок. Любая точка пространства может рассматриваться как нулевой вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор обозначают $\vec{0}$.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если ненулевые векторы AB и CD коллинеарны и лучи AB и CD сонаправлены, то и векторы называются сонаправленными. Если лучи противоположны, то векторы называются противоположно направленными.

Пример №1: В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K — середины ребер AC, BC и CD соответственно, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см. Найдите длины векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$.



Дано:

$ABCD$ – тетраэдр

M, N, K — середины ребер AC, BC, CD

$AB = 3$ см

$BC = 4$ см

$BD = 5$ см

Найти: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{NM}|$, $|\overrightarrow{BN}|$, $|\overrightarrow{NK}|$–?

Решение:

$|\overrightarrow{AB}| = AB = 3$ см, $|\overrightarrow{BC}| = BC = 4$ см, $|\overrightarrow{BD}| = BD = 5$ см

N, M — середины ребер $BC, AC \Rightarrow NM$ — средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow NM \parallel AB$, по свойству средней линии треугольника $NM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$ см.

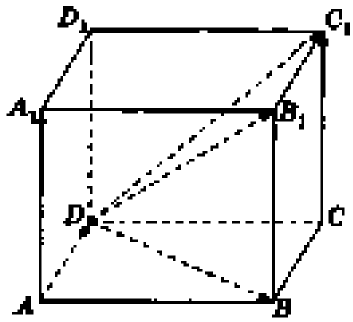
$\left|\overrightarrow{NM}\right| = NM = 1{,}5$ см

N — середина ребра BC, $\left|\overrightarrow{BN}\right| = BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ см

N, K — середины ребер $BC, CD \Rightarrow NK$ — средняя линия $\Delta DBC \Rightarrow NK \parallel BD$, по свойству средней линии треугольника $NK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ см.

$\left|\overrightarrow{NK}\right| = NK = 2{,}5$ см

Пример №2: Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ таковы: $AD = 8$ см, $AB = 9$ см и $AA_1 = 12$ см. Найдите длины векторов: $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед

$AD = 8$ см

$AB = 9$ см

$AA_1 = 12$ см

Найти: $\left|\overrightarrow{CC_1}\right|$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|$, $\left|\overrightarrow{CD}\right|$–?

Решение:

Т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, все его противоположные стороны равны.

$\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = AA_1 = 12$ см, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = AD = 8$ см, $\left|\overrightarrow{CD}\right| = AB = 9$ см

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 1-6.

Тема 14.2. Действия над векторами.

Цель: Познакомиться с правилами сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число. Научиться складывать и вычитать векторы, умножать векторы на число.

Правило треугольника.

От конца вектора $\vec{a}$ откладываем вектор, равный $\vec{b}$. Соединяем начало первого вектора и конец второго. Получившийся вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, называется суммой этих векторов.

Правило параллелограмма.

Вектора откладываются от одной точки. Достраивается параллелограмм со сторонами, параллельными данным векторам. Диагональ получившегося параллелограмма, идущая из их общего начала в противоположную вершину, является суммой исходных векторов.

При сложении векторов выполняется переместительный закон, т.е.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

и сочетательный закон, т.е. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Два ненулевых вектора называются противоположными, если они равны по длине и противоположно направлены.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Для нахождения разности векторов вторым способом можно воспользоваться формулой: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Даже если векторов больше, чем два, складывают их по тому же принципу – переносят так, чтобы начало каждого следующего совпало с концом предыдущего. Тогда вектор, соединяющий начало и конец такой ломаной, и будет суммой всех этих векторов. Это правило называется «правилом многоугольника».

Умножение вектора на число.

1) Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы сонаправлены, если $k > 0$, и противоположно направлены, если $k < 0$.

2) Произведение нулевого вектора на любое число есть нулевой вектор.

3) Вектора $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны для любого k. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны – то существует такое число k, что $\vec{a} = k\vec{b}$.

4) Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.

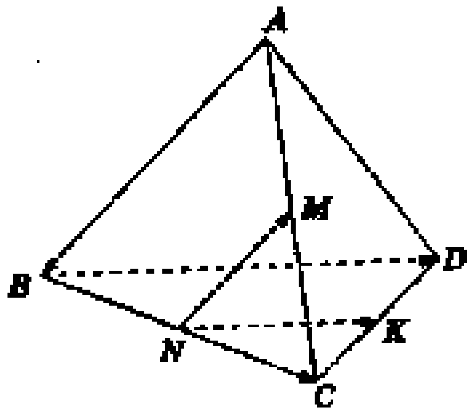
5) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и чисел k и l справедливы следующие законы:

Сочетательный: $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$

Первый распределительный: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

Второй распределительный: $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

Пример №1: Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$ в) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.



Дано:

$ABCD$ – тетраэдр

Доказать:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$

в) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

Доказательство:

По правилу треугольника.

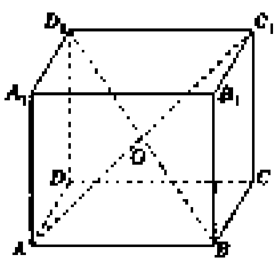
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$

в) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$

Пример №2: Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите число k такое, что: $AB = k \cdot CD$.



Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

$AC_1 \cap BD_1 = O$

Найти: k–?

Решение:

Т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, все его стороны равны.

$$\left.\begin{array}{c}|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}\end{array}\right\} \Rightarrow k = -1$$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 7-11.

Тема 14.3. Координаты точки в пространстве.

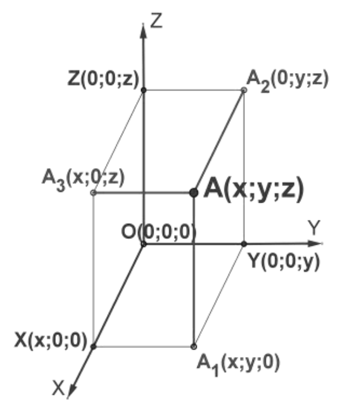
Цель: Познакомиться с понятием координаты точки в пространстве. Научиться находить координаты точки в пространстве.

Три попарно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей измерения образуют систему координат в пространстве. Точка пересечения всех прямых является началом системы координат.

Оси координат Ox, Oy и Oz называются соответственно: Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость. Получаем три координатные плоскости: Oxy, Oyz и Oxz.

Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами: x, y и z. Координата x называется абсциссой точки A, координата y — ординатой точки A, координата z — аппликатой точки A. Записываются так: $A(x; y; z)$.



Если точка находится на оси Ox, то её координаты $X(x; 0; 0)$.

Если точка находится на оси Oy, то её координаты $Y(0; y; 0)$.

Если точка находится на оси Oz, то её координаты $Z(0; 0; z)$.

Если точка находится в плоскости Oxy, то её координаты $A_1(x; y; 0)$. Если точка находится в плоскости Oyz, то её координаты $A_2(0; y; z)$. Если точка находится в плоскости Oxz, то её координаты $A_3(x; 0; z)$.

Пример №1: Даны точки $A(3;-1;0)$, $B(0;0;-7)$, $C(2;0;0)$, $D(-4;0;3)$, $E(0;-1;0)$, $F(1;2;3)$, $G(0;5;-7)$, $H\left(-\sqrt{5};\sqrt{3};0\right)$. Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс б) плоскости Oxz.

а) оси абсцисс (т.е. $y=z=0$): $C(2;0;0)$.

б) плоскости Oxz (т.е. $y=0$): $B(0;0;-7)$, $C(2;0;0)$, $D(-4;0;3)$.

Пример №2: Найдите координаты проекций точки $A(2;-3;5)$ на:

а) координатные плоскости Oxz, Oxy и Oyz

б) оси координат Ox, Oy и Oz.

а) проекций точки на Oxz (т.е. $y=0$): $A(2;0;5)$

проекций точки на Oxy (т.е. $z=0$): $A(2;-3;0)$

проекций точки на Oyz (т.е. $x=0$): $A(0;-3;5)$

б) проекций точки на Ox (т.е. $y=z=0$): $A(2;0;0)$

проекций точки на Oy (т.е. $x=z=0$): $A(0;-3;0)$

проекций точки на Oz (т.е. $x=y=0$): $A(0;0;5)$

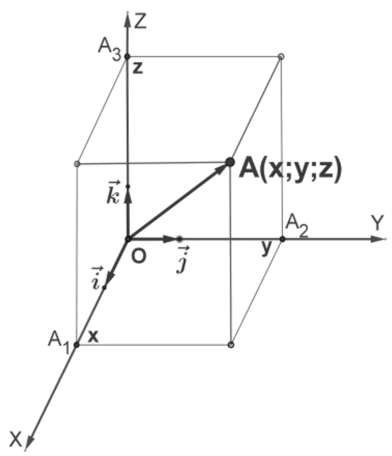
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 12-13.

Тема 14.4. Координат вектора в пространстве.

Цель: Познакомиться с понятием координат вектора в пространстве. Научиться находить координаты вектора в пространстве, координаты середины отрезка, раскладывать векторы в трехмерном пространстве.

Если в системе координат от начальной точки отложить единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, то можно определить прямоугольный базис. Любой вектор можно разложить по единичным векторам и представить в виде: $\overrightarrow{OA} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$.



Коэффициенты x, y и z определяются одним единственным образом и называются координатами вектора. Записываются так: $OA\{x;y;z\}$.

Рассмотрим правила о том, как с помощью координат записать:

- координаты суммы векторов, если даны координаты векторов:

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}, \vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$

- координаты разности векторов, если даны координаты векторов:

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}, \vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\}$

- координаты произведения вектора на число, если даны координаты вектора: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}, n\cdot\vec{a}\{n\cdot x_1; n\cdot y_1; n\cdot z_1\}$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и выполняется условие: $\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}$ Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Пример №1: Запишите координаты вектора $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$.

$\vec{a}\{3; 2; -5\}$

Пример №2: Дан вектор $\vec{a}\{5; -1; 2\}$. Запишите разложение вектора по координатным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$\vec{a}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

Пример №3: Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2; 0\}$, $\vec{b}\{0; -5; -2\}$ и $\vec{c}\{2; 1; -3\}$. Найдите координаты векторов $\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}$ и $\vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}$.

$$\overrightarrow{3b}\{0; -15; -6\}$$
$$2\vec{a}\{-2; 4; 0\}$$
$$\vec{c}\{2; 1; -3\}$$
$$\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}=\{4; -18; -9\}$$

$$\overrightarrow{3c}\{6; 3; -9\}$$
$$2b\{0; -10; -4\}$$
$$\vec{\vec{a}}\{-1; 2; 0\}$$
$$\vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}=\{5; 15; -5\}$$

Пример №4: Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{3; 6; 8\}$ и $\vec{b}\{6; 12; 16\}$

Проверим выполнение условия: $\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}$.

б) $\vec{c}\{1; -1; 3\}$ и $\vec{d}\{2; 3; 15\}$.

а) $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Условие выполнено, следовательно, вектора коллинеарны.

б) $\frac{1}{2}=\frac{-1}{3}=\frac{3}{15}$

$\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{5}$. Условие не выполнено, следовательно, вектора не коллинеарны.

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 14-19.

Тема 14.5. Длина вектора. Расстояние между двумя точками.

Цель: Познакомиться с формулами длины вектора и расстояния между двумя точками, координат середины отрезка. Научиться находить длину вектора, расстояний между точками, координаты середины отрезка.

Длина вектора, если даны координаты вектора:

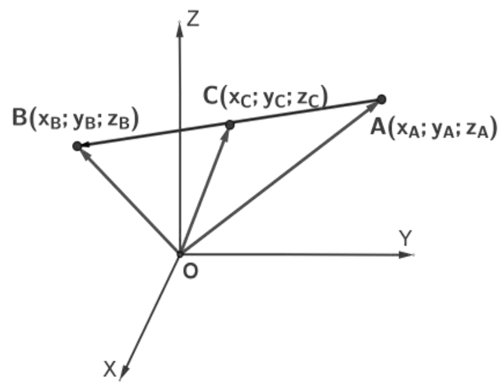
$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$: $|\vec{a}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$

Координаты вектора, если даны координаты начальной и конечной точки вектора: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

Расстояние между двумя точками, если даны координаты точек:

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Координаты срединной точки отрезка, если даны координаты начальной и конечной точки отрезка: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Пример №1: Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-1, 0{,}2)$, $B(1, -2, 3)$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - (-1)\right)^2 + (-2 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

Пример №2: Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты точки M, если $A(0, 3, -4)$, $B(-2, 2, 0)$.

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$M\left(\frac{0-2}{2};\frac{3+2}{2};\frac{-4+0}{2}\right)$

$M(-1;2{,}5;-2)$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 20.

Тема 14.6. Скалярное произведение векторов.

Цель: Познакомиться с формулой скалярного произведения векторов. Научиться находить скалярное произведение.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}^\wedge\vec{b}\right)$$

Если $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.

Результат скалярного произведения векторов является числом (в отличие от результата рассмотренных ранее действий с векторами — сложения, вычитания и умножения на число. В таких случаях результатом был вектор).

При умножении вектора на вектор получается число, так как длины векторов — это числа, косинус угла — число, соответственно, их произведение также будет являться числом.

1. Если векторы сонаправлены, то угол между ними будет равен 0, а косинус равен 1, скалярное произведение также будет положительным.

2. Если векторы направлены противоположно, то угол между ними будет равен 180^0. Скалярное произведение также отрицательно, так как косинус этого угла равен -1.

Справедливы и обратные утверждения:

3. Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между данными векторами острый.

4. Если скалярное произведение векторов — отрицательное число, то угол между данными векторами тупой.

5. Если угол между векторами прямой, то скалярное произведение векторов равно 0, так как косинус прямого угла равен 0.

6. Вектор, умноженный на самого себя будет числом, которое называется скалярным квадратом вектора. Скалярный квадрат вектора равен квадрату длины данного вектора.

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов и любого числа справедливы следующие свойства:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, если $\vec{a} \neq 0$.

2. Переместительный или коммутативный закон скалярного произведения: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3. Распределительный или дистрибутивный закон скалярного произведения: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

4. Сочетательный или ассоциативный закон скалярного произведения:

$$k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Пример №1: Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{\jmath} - 5\vec{k}$. Вычислите:

а) $\vec{a}\vec{b}$ б) $\vec{a}\vec{\imath}$ в) $\vec{b}\vec{\jmath}$ г) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{k}$.

Запишем координаты векторов и формулу для нахождения скалярного произведения через координаты: $\vec{a}\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

$\vec{a}\{3; -5; 1\}$, $\vec{b}\{0; 1; -5\}$, $\vec{\imath}\{1; 0; 0\}$, $\vec{\jmath}\{0; 1; 0\}$, $\vec{k}\{0; 0; 1\}$.

а) $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = -5 - 5 = -10$

б) $\vec{a}\vec{\imath} = 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3$

в) $\vec{b}\vec{\jmath} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 = 1$

г) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{k} = \vec{a}\vec{k} + \vec{b}\vec{k} = 1 - 5 = -4$

$\vec{a}\vec{k} = 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{b}\vec{k} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 = -5$

Пример №2: Даны векторы $\vec{a}\{3; -1; 1\}$, $\vec{b}\{-5; 1; 0\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a}\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -16 < 0 \Longrightarrow$ угол тупой.

Пример №3: Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны к вектору $\vec{c}$, $\vec{a}\hat{}\vec{b} = 120^0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Вычислите скалярные произведения $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot 2\vec{b}$ и $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$.

По условию $\vec{a} \perp \vec{c} \Longrightarrow \vec{a}\vec{c} = 0$, $\vec{b} \perp \vec{c} \Longrightarrow \vec{b}\vec{c} = 0$.

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot 2\vec{b} = 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}\vec{b} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^0 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{b}^2 = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{b}\hat{}\vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{c}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{c} - \vec{b}\vec{a} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} - \vec{c}^2 =$$

$$= \vec{a}^2 - \vec{b}\vec{a} + \vec{b}\vec{c} - \vec{c}^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 1 = \frac{1}{2}$$

Из предыдущего примера: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} = -\frac{1}{2}$

$$\vec{b}\vec{c} = 0$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}\hat{}\vec{a}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{c}^2 = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{c}\hat{}\vec{c}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

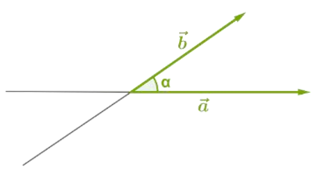
Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 21-22.

Тема 14.7. Угол между векторами и прямыми.

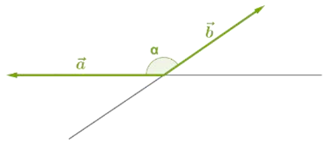
Цель: Познакомиться с формулой вычисления угла между векторами и прямыми. Научиться находить вычислять величины углов между векторами и прямыми.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда образуют угол.



Угол между векторами может принимать значения от 0^0 до 180^0 включительно.

Если векторы не параллельны, то их можно расположить на пересекающихся прямых.

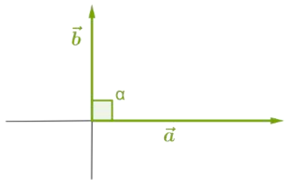


Векторы могут образовать:

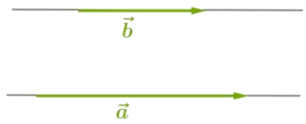
1. Острый угол

2. Тупой угол

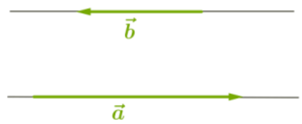
3. Прямой угол (векторы перпендикулярны)



4. Угол величиной 0^0 (векторы сонаправлены)



5. Угол величиной 180^0 (векторы противоположно направлены)



Если один из векторов или оба вектора нулевые, то угол между ними будет равен 0^0.

Угол между векторами записывают так: $\vec{a}\hat{}\vec{b} = \alpha$

Вектор называют направляющим вектором прямой, если он находится на прямой или параллелен этой прямой.

Чтобы определить косинус угла между прямыми, надо определить косинус угла между направляющими векторами этих прямых, то есть найти векторы, параллельные прямым, и определить косинус угла между векторами.

Для этого необходимо рассмотреть определение скалярного произведения, если векторы даны в координатной системе.

Если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Прежде была рассмотрена формула определения длины вектора в координатной форме.

Теперь, объединив эти формулы, получим формулу для определения косинуса угла между векторами в координатной форме. Так как из формулы скалярного произведения следует, то

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Угол между прямыми от 0^0 до 90^0.

Пример №1: Вычислите угол между векторами $\vec{a}\{2; -2; 0\}$, $\vec{b}\{3; 0; -3\}$.

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} = \frac{2\cdot3+(-2)\cdot0+0\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}} =$$

$$= \frac{6+0+0}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{9+0+9}} = \frac{6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{2\cdot4\cdot9\cdot2}} = \frac{6}{2\cdot2\cdot3} = \frac{1}{2}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 60^0$$

Закрепление материала студентами у доски и в тетрадях:

Практическая работа № 20 Векторы № 23-25.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. 10-11 кл. - М.: Просвещение, 2021.

2. Вернер А.Л. Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. 10 кл. и 11 кл. - М.: Просвещение, 2021.

Дополнительная:

3. Методические указания по проведению практических работ по учебной дисциплине ПД. 01 Математика, 2021 г.

4. Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы обучающихся по учебной дисциплине ПД. 01 Математика, 2021 г.

5. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения по учебной дисциплине ПД. 01 Математика, 2021 г.

6. Фонд оценочных средств по учебной дисциплине ПД. 01 Математика, 2021 г.

Рекомендуемые интернет - ресурсы:

7. http://mathprofi.ru/ - вся математика в одном месте. Это математический портал, на котором вы найдете любой материал по математическим дисциплинам.