ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

«Владивостокский морской рыбопромышленный колледж»
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования

«Дальневосточный государственный технический
рыбохозяйственный университет»

(«ВМРК» ФГБОУ ВО «ДАЛЬРЫБВТУЗ»)

КУРС ЛЕКЦИЙ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности
26.02.03
Судовождение

Владивосток
2021

ОДОБРЕН
Цикловой комиссией
естественнонаучных и
математических дисциплин
Председатель:
_________ Сухомлинова А.А.
(подпись)
Протокол №1 от 01.09. 2021 г.

Автор:
преподаватель «ВМРК» ФГБОУ ВО «Дальрыбвтуз»
Осипова О.А. ____________
подпись

Курс лекций составлен в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Математика, утвержденной зам. начальника колледжа по УВР 01.09.21 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ЛЕКЦИЙ 4

Введение. Содержание дисциплины и её задачи. Значение дисциплины в подготовке специалистов среднего звена. Роль математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин. 5

Тема 1.1. Определители второго и третьего порядка и их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. 25

Тема 1.2. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов. 37

Тема 1.3. Основные геометрические задачи. 41

Тема 1.4. Уравнение прямой на плоскости. 42

Тема 1.5. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола. 45

Тема 2.1. Понятие функции. Область ее определения, способы задания, свойства. 49

Тема 2.2. Предел функции. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. 53

Тема 2.3. Производная и ее геометрический смысл. Правила дифференцирования. 58

Тема 2.4. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значения функций. 63

Тема 3.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов. .74

Тема 3.2. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Площадь криволинейной трапеции. 77

Тема 3.3. Применение определенного интеграла к решению прикладных задач. 79

Тема 4.1. Числовые ряды. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Свойства рядов. 84

Тема 4.2. Признаки сходимости рядов. 89

Тема 4.3. Степенные ряды. 91

Тема 5.1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными. 93

Тема 5.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. 95

Тема 5.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. 98

Тема 7.1. Упорядоченные множества. Перестановки, сочетания, размещения и их свойства. 99

Тема 7.2. События и их классификация. Классическое и статистическое определения вероятности случайного события. 102

Тема 7.3. Предмет и задачи математической статистики. Способы отбора статистического материала. Статистическое распределение. Статистические оценки параметров распределения. 105

ЛИТЕРАТУРА 107

ПЕРЕЧЕНЬ ЛЕКЦИЙ

№ п/п	Наименование занятий	Кол-во часов
1	Введение. Содержание дисциплины и её задачи. Значение дисциплины в подготовке специалистов среднего звена. Роль математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин.	2
2	Тема 1.1. Определители второго и третьего порядка и их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера.	2
3	Тема 1.2. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов.	2
4	Тема 1.3. Основные геометрические задачи.	2
5	Тема 1.4. Уравнения прямой на плоскости.	1
6	Тема 1.5. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола.	2
7	Тема 2.1. Понятие функции. Область ее определения, способы задания, свойства.	2
8	Тема 2.2. Предел функции. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы.	2
9	Тема 2.3. Производная и ее геометрический смысл. Правила дифференцирования.	2
10	Тема 2.4. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значения функций.	2
11	Тема 3.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов.	2
12	Тема 3.2. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Площадь криволинейной трапеции.	2
13	Тема 3.3. Применение определенного интеграла к решению прикладных задач.	2
14	Тема 4.1. Числовые ряды. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Свойства рядов.	2
15	Тема 4.2. Признаки сходимости рядов.	1
16	Тема 4.3. Степенные ряды.	2
17	Тема 5.1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.	1
18	Тема 5.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.	2
19	Тема 5.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.	2
20	Тема 6.1. Абсолютная и относительная погрешности.	2
21	Тема 6.2. Округление чисел. Погрешности простейших арифметических действий.	2
22	Тема 7.1. Упорядоченные множества. Перестановки, сочетания, размещения и их свойства.	2
23	Тема 7.2. События и их классификация. Классическое и статистическое определения вероятности случайного события.	2
24	Тема 7.3. Предмет и задачи математической статистики. Способы отбора статистического материала. Статистическое распределение. Статистические оценки параметров распределения.	1
	Итого:	**44**

Введение. Содержание дисциплины и её задачи. Значение дисциплины в подготовке специалистов среднего звена. Роль математики при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Математика как язык науки.

Представляя собой тип формального знания, математика занимает особое место в отношении наук фактуального профиля. Она оказывается хорошо приспособленной для количественной обработки любой научной информации, независимо от ее содержания. Более того, во многих случаях математический формализм оказывается единственно возможным способом выразить физические характеристики явлений и процессов, поскольку их естественные свойства и особенно отношения непосредственно не наблюдаемы. Скажем, каким образом в физических терминах описать тяготение, эффекты электромагнетизма и т.п.? Их можно представить только математически как определенные числовые соотношения в законах, фиксируемых количественными показателями. Современная наука в лице квантовой механики и чуть ранее теория относительности лишь прибавили абстрактности теоретическим объектам, вполне лишая их наглядности. Только и остается апеллировать к математике. Заявил же однажды Л. Ландау, что современному физику вовсе не обязательно знать физику, ему достаточно знать математику.

Рассмотренное обстоятельство и выдвигает математику на роль языка науки. Пожалуй, впервые отчетливо это прозвучало у Г. Галилея, одного из решающих персонажей в создании математического естествознания, господствующего вот уже более трехсот лет. Галилей писал: "Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, который сначала научился постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики".

По мере роста абстрактности естествознания эта идея находила все более широкую реализацию, а на склоне XIX в. столетия уже вошла в практику научного исследования в качестве своего рода методологической максимы.

Именно так прозвучали слова известного американского физика-теоретика Д. Гиббса, когда однажды при обсуждении вопроса о преподавании английского языка в школе, он, по обыкновению молчавший на подобных совещаниях, неожиданно произнес: "Математика сота – тоже язык". Дескать, что вы тут все об английском да об английском, математика – также язык. Выражение стало крылатым. И вот уже вослед тому английский физикохимик, лауреат Нобелевской премии С.Н. Хиншельвуд объявляет, что ученые должны знать математику как родной язык.

Характерно рассуждение замечательного отечественного исследователя В. Налимова, работавшего в области наукометрии, теории математического эксперимента, предложившего вероятностные модели языка. Хорошая наука, пишет он, говорит на языке математики. Мы, люди, почему-то устроены так, что воспринимаем Мироздание через пространство, время и число. Это значит, что мы подготовлены к тому, чтобы обращаться к математике, подготовлены эволюцией живого, то есть априорно. Пытаясь приоткрыть тайную подоплеку математической власти над ученым, Налимов замечает далее: "Меня часто обвиняют, что я применяю математику в исследовании сознания, языковедения, биологической эволюции. Но разве там есть математика как таковая? Вряд ли. Математикой я пользуюсь как Наблюдатель. Так мне удобнее мыслить, иначе я не могу. Пространство, время, число и логика – это прерогатива Наблюдателя".

Ситуация порой складывается в науке так, что без применения соответствующего математического языка понять характер физического, химического и т.п. процесса невозможно. Не случайно признание П. Дирака, что каждый новый шаг в развитии физики требует все более высокой математики. Создавая планетарную модель атома, известный английский физик XX в. Э. Резерфорд испытал математические трудности. Вначале его теорию не приняли: она не звучала доказательно, и виной тому явилось незнание.

Э. Резерфордом теории вероятности, на основе механизма которой только и возможно было понять модельное представление атомных взаимодействий.

Осознав это, выдающийся уже к тому времени ученый, обладатель Нобелевской премии, записался в семинар математика профессора Лэмба и в течение двух лет вместе со студентами прослушал курс и отработал практикум по теории вероятности. На ее основе Э. Резерфорд смог описать поведение электрона, придав своей структурной модели убедительную точность и получив признание.

Напрашивается вопрос, что же содержится в объективных явлениях такое математическое, благодаря чему они и поддаются описанию на языке математики, на языке количественных характеристик? Это однородные единицы вещества, распределяемые в пространстве и времени. Те науки, которые дальше других прошли путь к выделению однородности, и оказываются лучше приспособленными для использования в них математики.

Вслед за физикой идут химические дисциплины, где также оперируют атомами и молекулами, и куда методом "парадигмальной прививки" перетекают из физики многие однородные единицы вещества и поля вместе с соответствующими приемами исследований. Все более утверждается математическая химия. Много слабее математический язык вошел пока в биологию, поскольку единицы субстрата здесь еще не выделены, кроме генетики. Еще менее подготовлены к этому гуманитарные разделы научного знания. Прорыв наблюдается только в языкознании с созданием и успешным развитием математической лингвистики, а также в логике (математическая логика). Науки об обществе, конечно, трудно подвержены количественному анализу в силу специфики явлений и процессов, здесь протекающих, поскольку отмечены неповторимостью и уникальностью. Интересную попытку выявить однородные элементы в исторических процессах предпринял Л. Толстой. В романе "Война и мир" писатель вводит понятие "дифференциал исторического действия" и поясняет, что, лишь допустив бесконечно малую единицу – дифференциал истории, то есть "однородные влечения людей", а затем научившись их интегрировать (брать суммы этих бесконечно малых), можно надеяться на постижение истории.

Однако подобная однородность оказывается весьма условной, поскольку "влечения людей" всегда окрашены индивидуальной уникальностью, психологически вариативны, что будет накладывать трудно учитываемые возмущения на постулируемую однородность. Вообще каждое событие в истории общества достаточно своеобразно и не поддается нивелированию в однородные единицы. Хорошая тому иллюстрация - одно рассуждение А. Пуанкаре. Как-то он прочитал у известного английского историка XIX в. Т. Карлейля констатацию: "Здесь прошел Иоанн Безземельный, и этот факт мне дороже, чем все исторические теории". Пуанкаре по сему поводу заметил: "Это язык историка. Физик бы так не сказал. Физик сказал бы: "Здесь прошел Иоанн Безземельный, и мне это совершенно безразлично, потому что больше он здесь не пройдет". Возражение математика Пуанкаре понятно: физику нужна повторяемость, лишь тогда он сможет выводить законы. Наоборот, неповторимость события – тот материал, который питает историческое описание.

Математики и нематематики о математике.

Галилео Галилей называл математику языком Книги Природы. Платон считал, на этом языке боги разговаривают с людьми.

Это язык, на котором говорят все точные науки (Н.И. Лобачевский), язык науки и единая симфония бесконечного (Д. Гильберт). И вообще, в любой науке столько науки, сколько в ней математики (И. Кант). А кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества (Ф. Бэкон).

Индийский математик Бхаскара II, живший в XII веке, утверждал, что знакомые с математикой видят в ней средство к пониманию всего существующего. С ним соглашался и живший в прошлом веке англичанин Джеймс Джинс: «Великий архитектор Вселенной всё более представляется нам чистым математиком».

«Логика доказывает, а интуиция творит. Без интуиции математик был бы похож на того писателя, который безупречен в правописании, но у которого нет мыслей», – это уже мнение А. Пуанкаре. Арнольд заметил: «Математика сводится к исследованию формальных следствий из аксиом не более, чем стихосложение к последовательному выписыванию букв из алфавита»

С другой стороны, математика – это даже больше, чем поэзия. Говорят, однажды Давида Гильберта спросили об одном из его бывших учеников. «Он стал поэтом, – ответил Д. Гилберт. – Для математики у него было слишком мало воображения».

Но это мнение вроде бы пристрастное. Послушаем независимых экспертов, двоечников по математике.

«Вдохновение нужно в геометрии не меньше, чем в поэзии» (А.С. Пушкин). «В математике есть своя красота, как в живописи и поэзии» (В.А. Жуковский). «В голове Архимеда было больше воображения, чем в голове Гомера» (Вольтер). А Батюшков разделял позицию французского учёного-энциклопедиста Ж. Даламбера, находя принципиальные различия: «Бросьте на остров необитаемый математика и стихотворца», – говорил Ж. Даламбер, – первый будет проводить линии и составлять углы, не заботясь, что никто не воспользуется его наблюдениями; второй перестанет сочинять стихи, ибо некому хвалить их…»

Математика гораздо свободнее в выразительных средствах, чем более зависимые от материальной Вселенной поэзия, живопись или музыка. Но, конечно же, она – не только язык. Как у каждой науки, у неё есть свой язык и предмет исследования. Для Арнольда математика – часть физики, экспериментальная наука, которая открывает человечеству самые важные и простые законы природы. По Герману Вейлю, «Занятие математикой – подобно мифотворчеству, литературе или музыке – это одна из наиболее присущих человеку областей его творческой деятельности, в которой проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии».

Математика принципиально привязана к устройству окружающего мира. Ведь сознание у нас развилось именно для работы с ним, для выстраивания из хаоса физических событий некой связной картины мира, начиная с пространства и времени. Если бы мир был устроен иначе, известные математические абстракции просто не возникали бы. Именно этим объясняется полная применимость её абстракций к описанию внешнего мира.

Но как быть с подозрением, что математика изучает не внешний мир, а свойства и способности человеческого сознания? Как, например, понятие множества привязано к устройству окружающего мира? Этот абстрактный объект и прочие абстрактные объекты существуют только в головном мозге у различных людей? А радиоволны существуют в приёмнике, а актёры – в телевизоре? И «полная применимость» абстракций как-то изначально обречена, если вспомнить про зияющие с начала XX века трещины в самом фундаменте математики, а также теоремы Гёделя.

Даже для арифметики требуется бесконечное количество аксиом, а в конце цепочки безупречных рассуждений нет никакой гарантии от утверждения, противоположного началу. «Бог существует, поскольку математика, несомненно, непротиворечива, но существует и дьявол, поскольку доказать её непротиворечивость мы не можем» (Г. Вейль). Ещё епископ Д. Беркли безответно укорял: «Как мало именно математики имеют права требовать строгого доказательства того, во что люди верят».

Математическая методология.

Место математики в системе наук определяется также тем, что она играет для других дисциплин и роль методологии. И не только в отношении естествознания, но и для наук социального, гуманитарного цикла. Как заметил еще Р. Декарт, математика вместе с тем, что она язык науки, является также способом мышления, инструментом доказательства. Таким образом, выполняет функцию общенаучного метода, принимая на себя, можно сказать, обязанности философской методологии.

Обладая способностью представлять любую информацию в виде количественных характеристик, математика вырабатывает и особые, отличные от естествознания приемы исследования – математический эксперимент, математическая гипотеза, математическое моделирование. Их специфика состоит в том, что вместо операций с веществом и энергией они получают результат путем решения соответствующих дифференциальных уравнений, интерпретируя затем полученные числовые выражения в терминах содержательного значения.

Вообще выделяют три вида эксперимента (от лат. experimentum - проба, опыт): натурный, мысленный и математический.

Натурный эксперимент представляет манипуляцию с вещами и энергиями. Он осуществляется в контролируемых и управляемых условиях, обычно специально созданных. Мысленный эксперимент – это также деятельность с материальными предметами и процессами, но взятыми не в натуре, а на уровне образного прочтения физической ситуации и в значительной мере, как считает Р. Харре, опираясь на интуицию. Так, Г. Галилей, рассуждая о возможности физических изменений систем, движущихся относительно других систем, провел мысленный эксперимент. "Наполнив" каюту корабля бабочками, мухами и т.п., стал "наблюдать" их поведение с целью определить разницу в состояниях, когда корабль плывет и когда он находится в покое.

Математический эксперимент, имея дело не с самими предметами и процессами природы, а с их количественными описаниями, позволяет избежать материальных затрат на сооружение установок и лабораторий, ибо, как заметил отечественный геометр А. Яглом, единственной лабораторией математика является его интеллект. Характерен эпизод. Как-то А. Эйнштейн с супругой знакомился со знаменитой американской обсерваторией Маунт Вильсон. Им показали гигантский телескоп. Фрау Эльза поинтересовалась, зачем нужны столь масштабные инструменты. Директор обсерватории, сдерживая улыбку перед подобной наивностью, прояснил, что это необходимо, чтобы исследовать глубины вселенной. "Странно, – отозвалась фрау, – а мой муж делает это на обороте старого почтового конверта..."

Аналогичным образом работает и математическая гипотеза, задавая физическую ситуацию на языке числовых параметров и оперируя затем последними. Так, вместо обычной используется своего рода "вычислительная" гипотеза, полученная на основе математических расчетов, благодаря чему имеем доступ к недоступным объектам. Эффективность математической гипотезы обусловлена возможностью на основе математического формализма находить по аналогии результат до выяснения его физического содержания.

В этом отношении примечательна история квантовой механики. Руководитель теоретического семинара нидерландский физик, работавший в Германии, П. Дебай попросил Э. Шредингера прореферировать статью Л. де Бройля "О волнах материи". При подготовке реферата Шредингер взял уравнение классической физики и, руководствуясь идеей де Бройля о том, что любой материальной частице соответствует некоторый волновой процесс, обобщил ситуацию, перенеся уравнение классической физики в новую область. Так появилось знаменитое волновое уравнение квантовой механики, ставшее вторым ее вариантом после матричного, возникшего несколько ранее. Кстати заметить, что Д. Гильберт, оценивая успех Шредингера, обратил внимание на то, что оказался невостребованным прием математической гипотезы, на возможность использования которого в свое время Гильберт указывал.

Еще ранее В. Гейзенберг и М. Борн, создавая квантовую механику, испытали математические затруднения и обратились за консультацией к патриарху математической Мекки в Геттингене Гильберту. Удовлетворив просьбу физиков, он вместе с тем им сказал, что всякий раз, когда ему приходилось иметь дело с матрицами, они возникали в качестве побочного продукта собственных значений краевой задачи для дифференциального уравнения. Гильберт посоветовал поискать, не обнаружатся ли дифференциальные уравнения, связанные с этими матрицами. Однако Гейзенберг и Борн только переглянулись. Они сочли это бестолковой идеей и, сопроводив долей веселого юмора, решили, что Гильберт не понимает, о чем говорит.

Когда же Гильберт узнал о создании Шредингером эквивалентного волнового варианта, пришел его черед повеселиться. Он заявил, что, если бы физики его послушались, они могли бы открыть волновую механику по крайней мере за 6 месяцев до Шредингера. При этом Гильберт добавил: "Видно, физика слишком сложна, для физиков". И еще он сказал, что в наше время физика достаточно важная наука, чтобы оставлять ее только физикам.

Так же эффективно и математическое моделирование. По определению, модель есть заместитель объекта, квазиобъект, на котором испытываются режимы работы исследуемого явления, и результаты переносятся с учетом масштабов на оригинал. Процедура получения информации на модели осуществляется следующим образом. Если А есть модель В, то выполняется такая зависимость $y=f(x)$, где f - знак связи, а y и x – переменные. Если, подставляя на место x характеристики А, будем получать на месте y набор значений В. В случае математического моделирования в качестве объекта-заместителя выступает не вещь, а набор дифференциальных уравнений, решая которые исследователь выводит результат и интерпретирует его в терминах вещественных характеристик изучаемого объекта.

Математика – источник представлений и концепций в естествознании.

Еще одно методологическое назначение математики состоит в том, она вырабатывает для остальной науки, прежде всего для естествознания, структуры мысли, формулы, на основе которых можно решать проблемы специальных наук.

Это обусловлено все той же особенностью математики описывать не свойства вещей, а свойства свойств, выделяя отношения, независимые от каких-либо конкретных свойств, то есть отношения отношений. Но поскольку и отношения, выводимые математикой, особые (будучи отношениями отношений), то ей удается проникать в самые глубокие характеристики мира и разговаривать на языке не просто отношений, а структур, определяемых как инварианты систем. Поэтому, кстати сказать, математики скорее говорят не о законах (раскрывающих общие, существенные, повторяющиеся и т.д. связи), а именно о структурах.

Эти глубинные проникновения в природу и позволяют математике исполнять роль методологии, выступая носителем плодотворных идей. Относительно сказанного современный американский исследователь Ф. Дайсон пишет: "Математика для физики – это не только инструмент, с помощью которого она может количественно описать явление, но и главный источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории". Близкие мысли высказывает известный математик, академик Б. Гнеденко, также подчеркивая, что роль математики не ограничивается функцией аппарата вычисления, подчеркивал, что математика – определенная концепция природы.

Поскольку привилегия математики – выделять чистые, безотносительные к какому-либо физическому (химическому или социально насыщенному содержанию), она тем самым вырабатывает модели возможных еще неизвестных науке состояний. Естествоиспытатель может выбирать из них и примеривать к своей области исследования. Это стимулирует научный поиск, пробуждая и будоража ученую мысль. В силу указанной особенности математику характеризуют как склад готовых костюмов, пошитых на все живые существа, мыслимые и немыслимые (Р. Фейнман), вообще на все возможные природные ситуации. То есть это своеобразный портной для разнообразных вещественных образований, которые могут быть вписаны в эти готовые одежды. Характеризуя рассматриваемую особенность отношений между математикой и физикой, американский физик-теоретик венгерского происхождения Е. Вигнер в режиме шутки произнес: "Физики – безответственные люди: они берут готовые математические уравнения и используют их, не зная, верны они или нет".

В свое время И. Кант метко определил: "Математика – наука, брошенная человеком на исследование мира в его возможных вариантах". Если физику, вообще естествоиспытателю, позволено видеть мир таким, каков он есть, то математику дано видеть мир во всех его логических вариантах. Иначе сказать, физик не может строить мир, противоречивый физически (и уж тем более – логически), математику же разрешены построения, противоречивые физически, лишь бы они не страдали логическими противоречиями. Физики говорят, каков мир, математики исследуют, каким бы он мог быть в его потенциальных версиях. Это и придает стимул воображению. Как замечает австрийский математик и писатель нашего времени Р. Музиль, математика есть роскошь броситься вперед, очертя голову, потому математики предаются самому отважному и восхитительному авантюризму, какой доступен человеку. Стоит заметить лишь, что раскованность и рискованность – преимущество не только собственно математика, но и любого исследователя, если и поскольку он мыслит математически, то есть пытаясь дать, по выражению Г. Вейля, "теоретическое изображение бытия на фоне возможного".

Здесь не должно сложиться впечатления о возможности бескрайней фантазийной деятельности ученого. Истина состоит в том, что нематематические науки, сталкиваясь с запретами в проявлении какого-либо свойства, действия, не знают границ, до которых распространяется их компетенция. Это способна определить и узаконить лишь математика, владеющая искусством расчета на основе количественного описания явлений. Другие науки знают лишь, что нечто разрешено, но они не умеют знать той черты, до которой это разрешено, не умеют устанавливать пределов возможного – той количественной меры, определяющей вариантность изменений. Скажем, биолог не располагает сведениями пределов возможного для жизни и познает их в диапазоне лишь наблюдаемого. В этой связи небезынтересно одно замечание по поводу творчества Д. Свифта.

Повествуя в памфлете "Гулливер у великанов" о приключениях героя, приписывает существам, среди которых он оказался, достаточно крупные размеры. Критика проявила интерес, насколько оправдана фантазия писателя: возможно ли нормальное существование подобных великанам людей, то есть выдержит ли кости ног столь габаритные формы и столь внушительный вес? Провели расчеты, оказалось, что кость человека способна удерживать подобных размеров массу тела. Решили, что очевидно Свифт либо произвел соответствующие вычисления сам, либо обратился к математикам. Едва ли писатель полностью полагался на интуицию.

Методологическое значение математики для других наук проявляется еще в одном аспекте. Поскольку ее абстракции отвлечены от конкретных свойств, она способна проводить аналогии между качественно различными объектами, переходить от одной области реальности к другой. Д. Пойа назвал это свойство математики умением "наводить мосты над пропастью" Там, где конкретная наука останавливается (кончается ее компетенция), математика в силу ее количественного подхода к явлениям, свободно переносит свои структуры на соседние, близкие и далекие, регионы природы. Видеть "склейки" – так характеризовал эту особенность математического подхода Б. Рассел и далее, развивая образ, он ставит шутливый вопрос о том, чем отличается состояние абсолютного опьянения от абсолютной трезвости. Пьяный видит одну вещь как две, а трезвый – две вещи как одну. То есть математика представляется наукой абсолютной трезвости.

В оправдание же нашего частого обращения к форме шутки отметим, что большие ученые довольно часто отсылают читателя к шутливым иллюстрациям. Видно, они позволяют легче донести некое содержание читателю. Ю. Шрейдер, кандидат физико-математических и доктор философских наук, вполне оправданно обратил внимание на стиль выражения, который он назвал "принципом сохранения серьезности": чем серьезнее наука, тем более шутливые примеры она использует. Мы будем подобные повороты мысли, встречающиеся в текстах ученых вовлекать в наше повествование, чтобы не оказаться... слишком серьезными.

Таковы некоторые методологические уроки, внушаемые математикой. Однако, сколь ни эффективна математическая наука, и на нее брошены некоторые тени, а лучше сказать: эти тени – есть продолжение ее достоинств (при неадекватном использовании последних).

Математический аппарат исследования применим там, где выявлена однородность, точнее сказать, математика и приводит природные образования к однородностям. Но тем самым она лишает мир многообразия и богатства качественных проявлений, ибо счет, по выражению отечественного математика современности И. Шафаревича, "убивает индивидуальность". Он пишет: «Мы имеем, скажем, яблоко, цветок, кошку, дом, солдата, студента, луну. Можно сосчитать и объявить, что их 7. Но 7 чего? Единственный ответ: "7 предметов". Различия между солдатом, луной, яблоком и т.д. исчезают. Они все потеряли свою индивидуальность и превратились в лишенные признаков "предметы". То есть счет выравнивает вещи, убирая "персональные" характеристики. Как шутил В. Маяковский, математику все едино: он может складывать окурки и паровозы.

Описывая объект, процесс, математика выявляет какую-то лишь одну (существенную) характеристику и, прослеживая ее вариации, выводит закономерность. Все остальные характеристики уходят в тень, иначе они будут мешать исследованию. Конечно, эти другие также могут оказаться предметом изучения, но будучи взяты по тому же математическому сценарию: каждый раз только один единственный параметр, одно выделенное свойство в отвлечении от остального разнообразия. Напрашивается аналогия. Ее проводит Ю. Шрейдер, называя математику пародией на природу. И в самом деле. Пародия схватывает какую-то одну характеристическую черту пародируемого, за которой уже не видно других особенностей, просто они не важны.

Однако из этого обстоятельства не следуют лишь негативные выводы. Во-первых, математика по-иному работать не может, а во-вторых, в подобном подходе свое преимущество, оно сопряжено, так сказать, с "чистотой" описания: налицо четкая заданность исследования, когда необходимо проследить "поведение" объекта на основе определенного свойства, вычленить линию изменений, тенденцию развития и передать информацию в строгих графиках, схемах, уравнениях.

Собственно, и пародия несет не только функцию карикатурной усмешки. Она улавливает значимые определения изображаемого и, выпячивая их, подчеркивает главное. Е. Евтушенко, выступая в 60-х годах в Томске, сразу предупредил, что читать стихи не будет (и не просите), а будет отвечать на вопросы. Среди них был такой: "Как Вы относитесь к пародиям на себя?" А что, ответил он, пародия – это хорошо, потому что пародировать можно лишь по-настоящему самобытного поэта, не безликого, но имеющего собственный голос, узнаваемый в массе голосов... По правде говоря, таких поэтов, на которых можно написать хорошую пародию, мало. Потому, как правило, пародии делаются не на стиль, а просто замечают неудачный оборот или сюжет стихотворения и потешаются над ними.

В этой связи вспоминается одно несколько парадоксальное замечание Д. Гранина в романе "Зубр". Характеризуя своего героя биолога Тимофеева-Ресовского (прозванного Зубром), писатель бросает фразу: "Что это за человек, если ему нельзя дать прозвища?"

Возвращаясь к математике, отметим еще одну ее особенность, также имеющую следствием нежелательные моменты. Дело касается математической точности. Точность есть выражение однозначности, исключающее вариантность, разброс значений, неопределенность. Этим и отличаются математические знаки – символы, обозначающие объекты и операции математики. Здесь символы жестко привязаны к значениям, не допуская разночтений, интерпретаций и объяснений, что имеет место относительно знаков других наук.

Таким образом, математические тексты обладают исключительной точностью, не достигаемой другими науками, поскольку у них другие задачи. Вместе с тем, именно эта последовательно реализуемая точность может оборачиваться для науки, применяющей математический аппарат (быть может, и для самой математики), известными утратами.

Математическая точность в описании реальности задает логически жесткий ход мысли, который оставляет очень узкий коридор поиску. Оценивая познавательную ситуацию в естествознании и, очевидно обобщая опыт собственных исканий, известный отечественный физик нашего времени Л. Мандельштам пишет: "Если бы науку с самого начала развивали такие строгие и тонкие умы, которыми обладают некоторые современные математики, которых я очень уважаю, точность не позволила бы двигаться вперед". Как тут не вспомнить Гегеля, который в свое время обратил афоризм: "Математика наука точная, потому что она наука тощая". Тощая в том отношении, что лишает полноты восприятия мира, разрешая мысли двигаться по крайне тонкой тропе в неизведанное.

Используя математические методы исследования, вовлекая их в познавательный поиск, науки должны учитывать возможности математики, считаясь с границами ее применимости. Имеется в виду то, что сама по себе математическая обработка содержания, его перевод на язык количественных описаний не дает прироста информации. Как замечает Г. Вейль, математика – это мясорубка. И если ее засыплешь лебедой, то и на выходе получишь ту же лебеду, только что мелко изрубленную. Надо полагать, осознание границ точных количественных методов и отсутствие универсальных (пригодных для всех наук) методов заставило обратиться к разработке в общем-то тоже научных, но неколичественных способов анализа. В частности, А.Заде развивает идею нечетких множеств и на этой основе – особых методов исследования. Вообще А. Заде исходит из того, что количественный анализ оказывается непригодным для описания сложных систем (гуманистических и сравнимых с ними). Действует так называемый принцип несовместимости: чем сложнее система, тем менее мы способны сделать точные и практически значимые выводы о ее поведении (чем глубже анализируем задачу, тем неопределеннее ее решение). Но часто высокая точность и не нужна, вполне достаточна приближенная характеристика.

Новый подход опирается на практику мышления, которое оперирует элементами "нечетких множеств", где, например, переход от "принадлежности классу" к "непринадлежности" ему не скачкообразен. Можно предположить, что в основе такого мышления лежит не двузначная логика, а логика с "нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода".

Базируясь на допущении нечеткости и частичной истины, А. Заде и предлагает особый логический аппарат. Он включает: 1) "лингвистические переменные" (вместо числовых или в дополнение к ним), в качестве которых функционируют слова естественного языка; 2) нечеткие высказывания, описывающие отношения между переменными. Например, "если х мало, то у очень велико", "если х не мало и не велико, то у не очень велико"; 3) нечеткие алгоритмы, описывающие сложные отношения. К примеру, "если у велико, то немного уменьшить х", "если у не очень велико и не очень мало, то очень ненамного уменьшить х".

Все это позволяет дать эффективные способы приближенного описания сложных систем там, где точные определения невозможны. Метод является более гибким, собственно, даже – при объяснении указанного плана явлений – единственно возможным, поскольку количественная характеристика оказывается здесь непродуктивной.

Одним словом, заключая главу "Математика в системе наук", подчеркнем важную роль этой науки как языка, арсенала особых методов исследования, источника представлений и концепций в естествознании. Вместе с тем следует отдавать отчет в том, что математика не всесильна и что ее особое место, которое ей обеспечено в системе наук, не означает ее исключительность.

Роль математики в изучении общепрофессиональных, специальных дисциплин и подготовке специалиста.

На современном этапе развития общества, для создания новых технологий, изобретения новых машин, управления современным производством нужен человек, обладающий системой знаний, умеющий применять знания в нестандартных ситуациях, работать в команде, отличающийся мобильностью и развитым чувством ответственности. Специалисту, вступающему в самостоятельную жизнь в условиях современного рынка труда и быстро изменяющегося информационного пространства, необходимо быть эффективным, конкурентоспособным работником. Он должен быть творческим, самостоятельным, коммуникабельным человеком, способным решать проблемы личные и коллектива. Ему должна быть присуща потребность к познанию нового, умение находить и отбирать нужную информацию. Основы такой подготовки и закладываются при изучении естественнонаучных дисциплин.

Поскольку основы профессионального развития личности специалиста закладываются в образовательном учреждении, начиная с первых лет обучения, в процессе усвоения естественнонаучных, а затем общепрофессиональных и специальных дисциплин, как раз математика с ее высокой степенью абстракции и есть фундамент для всего естествознания. Без нее не может самостоятельно существовать ни одна из наук, оперирующая какими-либо количественными данными и именно она определяет основу образования практически по любому направлению.

Математика (греч. mathematike, от máthema – знание, наука) – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Математика определяет разностороннее развитие логического мышления, обеспечивает базовыми навыками для дальнейшей деятельности и предопределяет профессиональные качества будущих специалистов.

В настоящее время математические методы широко используются для решения самых разнообразных технических и технологических задач. Поэтому студент должен предвидеть, что и после окончания образовательного учреждения он не раз столкнется с необходимостью применить свои математические знания в практической деятельности.

Математическая подготовка специалистов позволяет сформировать глубокие фундаментальные знания и обеспечивает мощным инструментом решения различных практических задач. Неоспоримым является тот факт, что математика не просто мощное средство решения практических задач и универсальный язык науки, но и доминирующий элемент общей культуры, неотъемлемая часть цивилизации.

Решающая роль математики в профессиональной подготовке современного специалиста многогранна и состоит в создании у студентов целостной системы взглядов на природу науки и её взаимосвязь с другими дисциплинами, которая складывалась исторически. И существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития самого математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его наиболее существенные черты и свойства на языке математических понятий и формул или, как теперь принято говорить, возможность построить математическую модель изучаемого объекта. В цепочке “математика – другие дисциплины” устанавливается связь не столько для математики, сколько для всех других дисциплин, т.к. применение сознательных и прочных знаний математических методов при решении прикладных задач профессиональной деятельности, предполагает доступное понимание общих принципов и законов, лежащих в основе дисциплин профессионального цикла, осознание связей между рассматриваемыми дисциплинами. Математические знания и навыки необходимы практически во всех профессиях, прежде всего в тех, которых связаны с естественными науками, техникой, экономикой. Но математика стала проникать и в области традиционно “нематематические” – управление государством, медицину, лингвистику и другие. Несомненна необходимость применения математических знаний и математического мышления врачу, историку, лингвисту и т.д.

В профессиональном образовании, нацеленном на интересы обучающегося, каждая изучаемая дисциплина строится в ориентации на функции профессиональной деятельности будущего специалиста. Профессиональная деятельность – это деятельность человека по своей профессии и специальности в определенной сфере и отрасли производства. От того, как человек готов к своей профессиональной деятельности, зависит его успех в работе. Профессиональное развитие студента понимается как изменение личности в процессе вхождения индивида в профессиональную среду, усвоение служебного опыта, овладение стандартами и ценностями профессионального сообщества. Изучаемые науки должны способствовать становлению многомерного взгляда, обучающегося на его будущую профессиональную деятельность.

В подготовке современного специалиста математическое образование занимает важнейшее место. Это объясняется, в первую очередь, тем, что математика является элементом общечеловеческой культуры, она воспитывает интеллект обучаемого, расширяет его кругозор, является проверенным временем и наиболее действенным средством умственного развития. Математика является также основой профессиональной культуры, так как без нее невозможно изучение других, в том числе и профессионально значимых, дисциплин. Кроме того, математике отводится особая роль в становлении и развитии научного мировоззрения студентов.

Решение прикладных задач профессиональной деятельности требует особых умений: связывать между собой и обобщать предметные знания, видеть объект в единстве его многообразных свойств и отношений, оценивать частное с позиций общего, что обеспечивает формирование готовности к профессиональной деятельности.

Обществу необходим специалист-профессионал, способный реагировать на быстрые изменения в соответствующей профессиональной сфере. Особую значимость приобретает наличие у специалиста не столько узкоспециального, сколько твердого фундаментального образования, на основании которого можно путем самообразования не отставать от современных веяний науки и техники.

При анализе перечня специальных дисциплин иногда создается впечатление, что их вполне достаточно для той деятельности, которую выполняет большинство выпускников. Однако специальные знания могут обеспечить лишь узкую и специфическую деятельность с жесткими рамками. Фактически же человек, в какой бы области он ни работал, вынужден реагировать на изменения, которые в ней непрерывно происходят. Тогда и начинает работать запас теоретических знаний.

Необходимо, чтобы студенты знали, что математика является тем орудием, которое будет им необходимо на протяжении всей последующей учебы и работы.

Поэтому, кроме формирования у студентов математических понятий и соответствующих умений, целесообразно развивать у них правильное представление о роли математики вообще и различных ее методов при решении новых научных и технических задач.

Особую актуальность приобретает проблема органичного сочетания профессионального и фундаментального образования, которая осуществляется, прежде всего, путем установления междисциплинарных связей математики с естественнонаучными, общепрофессиональными и специальными дисциплинами.

Обучение математике ориентируется не столько на математическое образование как таковое, сколько на образование с помощью математики. Таким образом, возникает необходимость реализации идеи «математика для всех», которая лежит в основе формирования математической культуры как всеобщего достояния.

Таким образом, изучение и преподавание математики является не только важнейшей составной частью профессиональной подготовки специалистов. Математика выполняет и важные общекультурные функции, стимулирует развитие лучших качеств личности, ее творческих способностей и нравственных достоинств. Можно сказать, что математическая культура духовно облагораживает наши кадры, выдвигая их на достойное место в рядах отечественной интеллигенции, помогая им в деловом росте, участии в общественной и государственной жизни.

Тема 1.1. Определители второго и третьего порядка и их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера.

Цель: Познакомиться с понятием матрицы, их видами, определителей 2 и 3 и n-ого порядка, их свойствами, с алгоритмом метода Крамера для решения систем линейных уравнений. Научиться выполнять операции над матрицами, находить определители матриц, решать системы линейных уравнений различными методами.

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1{,}5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3 \times 1$$

$$(4) \quad 1 \times 1$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B. В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Виды матриц:

1) Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, причём число ее строк или столбцов называется порядком матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются первая матрица – её порядок равен 3, и третья матрица – её порядок 1.

2) Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется прямоугольной. В примерах это вторая матрица.

3) Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n})$, называется строкой (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец – столбцом.

4) Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается (0), или просто 0.

$$0 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется треугольной матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

6) Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7) Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется единичной матрицей и обозначается буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами:

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$A = B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

1) Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу A^T из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

столбец является строкой матрицы A с тем же номером).

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу A^T называют транспонированной матрицей A, а переход от A к A^T транспонированием. Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T. Связь между матрицей и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

2) Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц A и B называется матрица C, которая определяется по правилу:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix} \text{ или } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойства:

1. коммутативное $A + B = B + A$.

2. ассоциативное $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. для любой матрицы A найдется единственная матрица B такая, что $A + B = 0$.

4. $A + 0 = A$.

3) Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу:

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} \end{pmatrix} \text{ или } c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Для любых чисел α и β и матриц A и B выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

3. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta B$.

4) Умножение матриц. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы. Произведением матрицы A на матрицу B называется новая матрица $C = A \cdot B$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

Свойства:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2) ассоциативное и дистрибутивное

$(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$ и $(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C$

3) $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Пример №1: Найти матрицу транспонированную данной:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

б) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Пример №2: Найти сумму матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ – нельзя, т.к. размеры матриц различны.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Пример №3: Выполнить действия:

а) $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

б) Найти $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Пример №4: Вычислите произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

б) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}$$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ – нельзя, т.к. количество столбцов первой матрицы не равно количеству строк второй матрицы.

Определителем 2-ого порядка называется число, связанное с квадратной матрицей второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ следующей формулой: $|A| = ad - bc$.

Определителем 3-его порядка называется число, связанное с квадратной матрицей третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ следующей формулой:

$$|A| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

Определитель n - ого порядка ($n > 3$) осуществляется с использованием свойств определителя:

1) определитель не меняется, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную (умноженный) на любое число.

2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

3) если строку (столбец) умножить на какое-либо число, то определитель умножится на это число.

4) определитель матрицы не меняется при транспонировании.

5) если в матрице определителя содержится две одинаковые строки (столбца), то определитель $= 0$.

6) если в матрице содержится строка (столбец), состоящая из одних нулей, то определитель $= 0$.

Три способа вычисления определителя n-ого порядка:

- через сумму произведений сочетаний элементов матрицы;

- через разложение определителя по элементам строки или столбца матрицы;

- методом приведения матрицы к верхней треугольной (методом Гаусса).

Метод Гаусса:

1) Матрица A с помощью элементарных преобразований приводится к такому виду, чтобы в первом столбце все элементы, кроме a_{11} стали нулевыми. Нулевые элементы получаются для того, чтобы получить самое простое разложение определителя по элементам первого столбца.

2) После такого преобразования матрицы A, получим:

$|A| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = a_{11} \cdot M_{11}$, где M_{11} – минор $(n-1)$ - ого порядка, получающийся из матрицы A вычеркиванием элементов ее первой строки и первого столбца. С матрицей, которой соответствует минор M_{11}, выполняется такая же процедура получения нулевых элементов в первом столбце. И так далее до окончательного вычисления определителя.

Замечание: При получении минора 3 порядка для упрощения можно воспользоваться формулой: $|A| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh.$

Пример №5: Вычислить определитель матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. $|A| = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 7$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. $|A| = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 11$

Пример №6: Вычислить определитель:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 5 \cdot (-3) \cdot 7 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot (-3) \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 8 \cdot (-2) =$$
$$= -105 - 4 + 96 + 9 - 56 + 80 = 20$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0{,}5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0{,}5 \cdot 2 - (-2) \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 1 \cdot$$
$$\cdot 2 = -3 - 2 - 2 = -7$$

Пример №7: Вычислить определитель матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & 4 & 21 \\ 4 & -4 & 8 & 27 \end{pmatrix}$.

С помощью элементарных преобразований (сложения и вычитания строк матрицы) приводится к такому виду, чтобы в первом столбце все элементы, кроме $a_{11} = 1$ стали нулевыми. Для этого: из второй строки вычитаем первую; из второй строки вычитаем первую, умноженную на 3; из третьей строки вычитаем первую, умноженную на 4. Получим:

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1-1 & 5-(-1) & 5-0 & -8-5 \\ 3-1\cdot 3 & -3-(-1)\cdot 3 & 4-0\cdot 3 & 21-5\cdot 3 \\ 4-1\cdot 4 & -4-(-1)\cdot 4 & 8-0\cdot 4 & 27-5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

После такого преобразования матрицы А вычеркиваем элементы первой строки и первого столбца (по формуле $|A| = a_{11} \cdot M_{11}$), получим:

$$|A| = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Это минор третьего порядка, его определитель можно найти с помощью формулы: $|A| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 6 \cdot 4 \cdot 1 + (-13) \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \cdot 6 - (-13) \cdot 4 \cdot 0 - 6 \cdot 6 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot 5 = -120$$

Понятие обратной матрицы вводится лишь для квадратных матриц, определитель которых отличен от нуля, то есть для невырожденных квадратных матриц.

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, n$, определитель которой отличен от нуля $|A| \neq 0$, если справедливы равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n на n.

Методы нахождения обратной матрицы:

1) Нахождение обратной матрицы с помощью матрицы из алгебраических дополнений.

2) Нахождение обратной матрицы методом Гаусса – Жордана.

3) Нахождение элементов обратной матрицы с помощью решения соответствующих систем линейных уравнений.

Нахождение обратной матрицы с помощью матрицы из алгебраических дополнений.

Составим алгоритм нахождения обратной матрицы с использованием равенства: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T$.

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).

2. Строим $\|A_{ij}\|$ - матрицу из алгебраических дополнений элементов a_{ij}.

Минор k -ого порядка матрицы A порядка m на n – это определитель матрицы порядка k на k, которая получается из элементов матрицы A, находящихся в выбранных k строках и k столбцах (k не превосходит наименьшего из чисел m или n). Минор $(n-1)$ – ого порядка, который составляется из элементов всех строк, кроме i - ой, и всех столбцов, кроме j - ого, квадратной матрицы A порядка n на n обозначим как M_{ij}. Иными словами, минор M_{ij} получается из квадратной матрицы A порядка n на n вычеркиванием элементов i – ой строки и j – ого столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы

$A = \|a_{ij}\|$, $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, n$, называют минор $(n-1)$ - ого порядка, который получается из матрицы A, вычеркиванием элементов ее i -ой строки и j -ого столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается как A_{ij}. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

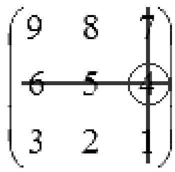
3. Транспонируем матрицу $\|A_{ij}\|$, тем самым получаем $\|A_{ij}\|^T$.

4. Умножаем каждый элемент матрицы $\|A_{ij}\|^T$ на число $\frac{1}{|A|}$. Этой операцией завершается нахождение обратной матрицы A^{-1}.

Пример №8: запишем, минор 2 - ого порядка, который получается из матрицы A вычеркиванием первой строки и второго столбца:

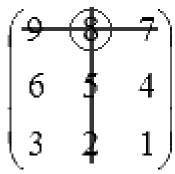
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6$$



Покажем минор, который получается из матрицы A вычеркиванием второй строки и третьего столбца:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = -6$$



Проиллюстрируем построение этих миноров.

Пример №9: Найти A_{12}–?

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 \cdot 1 - 4 \cdot 3) = 6$$

Пример №10: Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

Вычислим определитель третьего порядка матрицы A по формуле:

$$|A| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

$$|A| = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot (-2) =$$
$$= 16$$

Определитель отличен от нуля, так что матрица A обратима. Найдем матрицу из алгебраических дополнений: $\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 3) = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-2 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (4 \cdot 0 - (-2) \cdot 3) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot \big(3 \cdot 0 - 2 \cdot (-2)\big) = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 0 - (-2) \cdot 1) = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \big(3 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2)\big) = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4) = 11$$

Составляем матрицу: $\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

Транспонируем ее: $\|A_{ij}\|^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

Теперь, подставляя в формулу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T$ полученные данные, находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot (-6) & \frac{1}{16} \cdot 2 \\ \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot 4 & \frac{1}{16} \cdot 4 \\ \frac{1}{16} \cdot (-8) & \frac{1}{16} \cdot (-1) & \frac{1}{16} \cdot 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

Пусть нам требуется решить систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные переменные, a_{ij}, $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, n$ – числовые коэффициенты, $b_1, b_2, \dots, b_n$ - свободные члены.

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы и убеждаемся, что он отличен от нуля.

2. Находим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ b_2 + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_n + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_1 + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + b_2 + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} + b_n + \cdots + a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + b_n \end{vmatrix}$$

которые являются определителями матриц, полученных из матрицы A заменой k – ого столбца ($k = 1,2, \dots, n$) на столбец свободных членов.

3. Вычисляем искомые неизвестные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ по формулам:

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Замечание: Число уравнений должно быть равно числу неизвестных.

Пример №11: Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Определим матрицу системы (выпишем коэффициенты при переменных):

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 1 \\ 3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель основной матрицы системы по формуле:

$|A| = aek + +bfg + cdh - ceg - bdk - afh$ и убеждаемся, что он отличен от нуля:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -7$$

Находим остальные определители (полученные заменой столбцов основной матрицы на столбец свободных членов), которые помогут нам найти корни системы уравнений:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -7$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -14$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -21$$

Вычисляем искомые неизвестные переменные x_1, x_2, x_3по формулам:

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$

$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$

$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-21}{-7} = 3$

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

Тема 1.2. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов.

Цель: Познакомиться с правилами сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число, с формулами длины вектора, орта вектора, скалярного произведения, угла между векторами и прямыми, условиями коллинеарности, компланарности, ортогональности векторов. Научиться выполнять операции над векторами, находить длину вектора, орт вектора, скалярное произведение и угол между векторами и прямыми, определять коллинеарность, компланарность, ортогональность векторов.

Линейные операции над векторами:

1) Сложение, вычитание, умножение на число, разложение по базисным векторам: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и выполняется условие: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

3) Система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется линейно зависимыми или компланарными, т.е. лежащими в одной плоскости, если выполняется условие: $\Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0$. Если условие не выполнятся, то система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется линейно независимыми и образуют базис.

4) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, если приведенные к общему началу они образуют прямой угол и выполняется условие $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Векторная алгебра:

1) Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b})$. Если векторы заданы через соответствующие им координаты $\vec{a}\{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b}\{x_b; y_b; z_b\}$, то скалярное произведение выражается через формулу: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$. Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между векторами острый, отрицательное число - тупой, равно нулю - прямой.

2) Угол между векторами находится по формуле:

$\cos(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$.

3) Длина вектора находится по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

4) Орт вектора $\vec{a}$ (обозначается e_a) - это вектор коллинеарный и сонаправленный с вектором $\vec{a}$, длина которого равна 1. Орт вектора находится по формуле: $e_a = \vec{a} \cdot \frac{1}{|a|}$.

Пример №1: Выполните линейные операции с данными векторами:

$3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}\{3;\ -1;\ -4\}$, $\vec{b}\{-3;\ -7;\ 1\}$.

Чтобы найти вектор $3\vec{a}$ нужно координаты вектора $\vec{a}$ умножить на 3, получим: $3\vec{a}\{3 \cdot 3;\ 3 \cdot (-1);\ 3 \cdot (-4)\}$, $3\vec{a}\{9;\ -3;\ -12\}$.

Чтобы найти вектор $2\vec{b}$ нужно координаты вектора $\vec{b}$ умножить на 2, получим: $2\vec{b}\{2 \cdot (-3);\ 2 \cdot (-7);\ 2 \cdot 1\}$, $2\vec{b}\{-6;\ -14;\ 2\}$. Теперь найдем разность полученных векторов и получим ответ:

$3\vec{a} - 2\vec{b}\{9 - (-6);\ -3 - (-14);\ -12 - 2\}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}\{15;\ 11;\ -14\}$.

Пример №2: Докажите, что векторы $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $2\vec{c} - 5\vec{d}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{1;\ 5;\ -3\}$, $\vec{b}\{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{c}\{2;\ 1;\ 10\}$, $\vec{d}\{-2;\ 2;\ 4\}$.

Найдем вектора $3\vec{b}$, $2\vec{c}$ и $5\vec{d}$, для этого координаты векторов умножаем на константы перед ними, получим: $3\vec{b}\{3 \cdot 2;\ 3 \cdot (-3);\ 3 \cdot 1\}$, $3\vec{b}\{6;\ -9;\ 3\}$,

$2\vec{c}\{2 \cdot 2;\ 2 \cdot 1;\ 2 \cdot 10\}$, $2\vec{c}\{4;\ 2;\ 20\}$, $5\vec{d}\{5 \cdot (-2);\ 5 \cdot 2;\ 5 \cdot 4\}$, $5\vec{d}\{-10;\ 10;\ 20\}$.

Теперь найдем вектора $\vec{a} + 3\vec{b}\{1 + 6;\ 5 + (-9);\ -3 + 3\}$,

$\vec{a} + 3\vec{b}\{7;\ -4;\ 0\}$ и

$2\vec{c} - 5\vec{d}\{4 - (-10);\ 2 - 10;\ 20 - 20\}$, $2\vec{c} - 5\vec{d}\{14;\ -8;\ 0\}$.

Проверим выполнение условия: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$

$\frac{7}{14} = \frac{-4}{-8} = \frac{0}{0}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{0}{0}$. Условие выполнено (напомним, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору), следовательно, вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $2\vec{c} - 5\vec{d}$ коллинеарны.

Пример №3: Докажите, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{a}\{4;\ 0;\ 6\}$, $\vec{b}\{0;\ 4;\ 3\}$, $\vec{c}\{-1;\ 2;\ 0\}$.

Проверим выполнение условия: $\Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = 0.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 =$$

$$= 24 - 24 = 0$$

Условие выполнено, следовательно, вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Пример №4: Докажите, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ ортогональны, если $\vec{a}\{2;\ -4;\ 2\}$, $\vec{b}\{6;\ 5;\ 4\}$.

Проверим выполнение условия: $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$.

$2 \cdot 6 + (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 0$

$12 - 20 + 8 = 0$

$0 = 0$. Условие выполнено, следовательно, вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ ортогональны.

Пример №5:

а) Найти скалярное произведение векторов, если

$|\vec{a}\ | = 2, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \pi$. Подставим в формулу данные условия, получим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}\ | \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = 2 \cdot 6 \cdot \cos\pi = 12 \cdot (-1) = -12$. Для нахождения значения $\cos\pi$ воспользовались таблицей значений углов тригонометрических функций:

Функция	Аргумент t															
	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{tg}\, t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\mathrm{ctg}\, t$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

б) Найти скалярное произведение векторов и определить вид угла (прямой, острый или тупой), если $\vec{a}\{3;\ 2;\ -1\}$, $\vec{b}\{5;\ -6;\ -4\}$. Подставим в формулу данные условия, получим:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-4) = 15 - 12 + 4 = 7.$

Так как скалярное произведение векторов — положительное число ($7 > 0$), то угол между векторами острый.

Пример №6: Найти угол между векторами, если $\vec{a}\{-2;\ -7;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ 19;\ 14\}$.

Подставим в формулу данные условия, получим:

$$\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\ \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 1 + (-7) \cdot 19 + 3 \cdot 14}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 19^2 + 14^2}} = \frac{-2 - 133 + 42}{\sqrt{4 + 49 + 9} \cdot \sqrt{1 + 361 + 196}} =$$

$$= -\frac{93}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{558}} = -\frac{93}{\sqrt{34596}} = -\frac{93}{186} = -\frac{1}{2}$$

Решим тригонометрическое уравнение $\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = -\frac{1}{2}$.

Воспользуемся таблицей значений углов тригонометрических функций и найдем $\cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = -\frac{1}{2}$

Из нее $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = 120^0$

Пример №7: Найти длину вектора, если $\vec{a}\{4;\ -3;\ 12\}$. Подставим в формулу данные условия, получим:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Пример №8: Найти орт вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}\{2;\ -3;\ 6\}$. Чтобы найти орт вектора, вычислим его длину:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Подставим в формулу данные условия, получим:

$$e_a = \vec{a} \cdot \frac{1}{|a|} = \{2;\ -3;\ 6\} \cdot \frac{1}{7} = \left\{\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7};\ \frac{6}{7}\right\}$$

Тема 1.3. Основные геометрические задачи.

Цель: Познакомиться с понятиями системы координат, декартовой системой координат на плоскости и в пространстве, с формулами вычисления длины вектора через координаты его начала и конца, координат середины отрезка. Научиться находить координаты вектора в пространстве, координаты середины отрезка.

Системой координат на прямой называется совокупность точки O – начала координат и единичного базисного вектора $\vec{e}$, коллинеарного данной прямой.

Декартовой системой координат на плоскости называется совокупность точки O – начала координат и двух базисных векторов $\vec{e}1$, $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ неколлинеарны).

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки O – начала координат и трех базисных векторов $\vec{e}1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$- некомпланарны).

	Координаты на прямой	Координаты на плоскости	Координаты в пространстве
Название	Числовая ось	Прямоугольная декартовая система координат	Прямоугольная декартовая система координат
Способ задания системы	(·) O - начало координат	(·) O - начало координат $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ - базисные векторы	(·) O - начало координат $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ - базисные векторы

координат	$\vec{e}$ – базисный вектор		
Координаты $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A\}$	$\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A; y_B-y_A\}$	$\overrightarrow{AB}=$ $\{x_B-x_A; y_B-y_A; z_A-Z_B\}$
Длина $\overrightarrow{AB}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert x_B-x_A\rvert$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=$ $=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=$ $=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+ +(z_B-Z_A)^2}$
Координаты серединной точки отрезка	$C\,(\frac{x_A+x_B}{2})$	$C\,(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$	$C\,(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2})$

Пример №1: Найти периметр треугольника ABC, если $A(1;-3)$, $B(3,3)$, $C(-6;4)$.

$$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(3-1)^2+\left(3-(-3)\right)^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=4\sqrt{13}$$

$$\lvert\overrightarrow{BC}\rvert=\sqrt{(-6-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{(-9)^2+1^2}=\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$$

$$\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{(-6-1)^2+\left(4-(-3)\right)^2}=\sqrt{(-7)^2+7^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$

$$P_{\Delta ABC}=4\sqrt{13}+\sqrt{82}+7\sqrt{2}$$

Тема 1.4. Уравнение прямой на плоскости.

Цель: Познакомиться с различными способами задания уравнение прямой на плоскости. Научиться решать задачи, используя уравнения прямых на плоскости.

1) Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$.

$\vec{n}=\{A;B\}$ перпендикулярный к прямой $Ax+By+C=0$ называется нормальным вектором.

$\vec{l}=\{-B;A\}$ направленный вдоль прямой $Ax+By+C=0$ называется направляющим вектором.

Угол между двумя прямыми равен углу между нормальными векторами. Если прямые a и b перпендикулярны, то $\vec{n}_a=\vec{l}_b$.

2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где k - угловой коэффициент прямой, а b – длина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

Если на прямой а взяты точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Если прямые а и b параллельны, то $k_1 = k_2$.

Если прямые а и b перпендикулярны $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Если прямые а и b пересекаются, то $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

3) Уравнение прямой "в отрезках": $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Числа a и b равны длинам отрезков, отсекаемых прямой от осей ОХ и ОУ, считая от начала координат.

Пример №1: Через точку $P(-2, 5)$ проходит прямая, перпендикулярная прямой, заданной уравнением $5x - y - 11 = 0$. Запишите уравнение этой прямой.

Обозначим через $\vec{n}_a$ и $\vec{l}_a$ перпендикулярный и направляющий вектора для прямой $5x - y - 11 = 0$, а через $\vec{n}_b$ и $\vec{l}_b$ перпендикулярный и направляющий вектора искомой прямой.

Для прямой $5x - y - 11 = 0$ определим коэффициенты A, B и C с помощью общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, получим: $A = 5$, $B = -1$, $C = -11$, тогда перпендикулярный и направляющий вектора для данной прямой имеют координаты: $\vec{n}_a = \{A; B\} = \{5; -1\}$ и $\vec{l}_a = \{-B; A\} = \{1; 5\}$.

Чтобы написать уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x - y - 11 = 0$, воспользуемся правилом: если прямые a и b перпендикулярны, то $\vec{n}_a = \vec{l}_b$, значит $\vec{l}_b = \{-B; A\} = \{5; -1\}$. Из этого следует, что коэффициенты A и B искомой прямой равны: $A = -1, B = -5$. Чтобы найти коэффициент C, подставим в общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициенты A и B и координаты точки $P(-2, 5)$, получим: $-1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 5 + C = 0$. Решим данное уравнение:

$2 - 25 + C = 0$

$-23 + C = 0$

$C = 23$

Уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x - y - 11 = 0$, будет иметь вид: $-1 \cdot x + (-5) \cdot y + 23 = 0$, для получения положительного коэффициента при x, умножим данное уравнение на -1 и получим ответ: $x + 5y - 23 = 0$.

Пример №2: Определить k и b для прямой $2x - y + 3 = 0$. Чтобы определить коэффициенты k и b, нужно из данного уравнения выразить y, получим:

$$-y = -2x - 3$$

$$y = 2x + 3$$

Из уравнения прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$ следует, что $k = 2$ и $b = 3$.

Пример №3: Найдите угловой коэффициент прямой по двум точкам $A(3, 8)$ и $B(2, 10)$.

Воспользуемся правилом: если на прямой а взяты точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, подставим в формулу координаты точек A, B и получим: $k = \frac{10-8}{2-3} = -2$.

Пример №4: Вычислите тангенс одного из углов, образуемых прямыми: $x + 5y - 7 = 0$ и $2x - 3y + 8 = 0$. Воспользуемся правилом: если прямые a и b пересекаются, то $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$. Чтобы найти угловые коэффициенты прямых k_1 и k_2, нужно из их уравнений выразить y, получим: $x + 5y - 7 = 0$

$5y = -x + 7$

$y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$

$y = -0{,}25x + 1{,}4$

Т.е. $k_1 = -\frac{1}{5}$ теперь найдем второй коэффициент:

$2x - 3y + 8 = 0$

$-3y = -2x - 8$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

$y = \frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$

Т.е. $k_2 = \frac{2}{3}$, подставим полученные данные в формулу $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ и получим ответ: $tg\varphi = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{10+3}{15}}{\frac{15-2}{15}} = \frac{13}{15} \cdot \frac{15}{13} = 1.$

Пример №5: Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $P(4, -3)$, отсекающей от координатных осей отрезки одинаковой длины. Т.к. отрезки одинаковой длины, то $a = b$. Подставим координаты точки $P(4, -3)$ в уравнение прямой "в отрезках": $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, получим:

$\frac{4}{a} + \frac{-3}{a} = 1$ (т.к. $a = b$)

$\frac{4-3}{a} = 1$

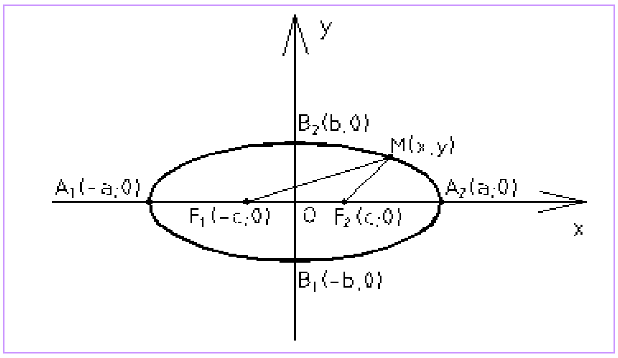
$\frac{1}{a} = 1$

$a = 1 = b$, тогда уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$ или $x + y = 1$.

Тема 1.5. Окружность и эллипс. Гипербола и парабола.

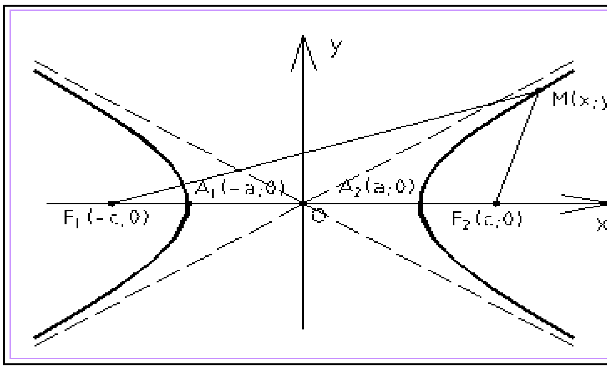
Цель: Познакомиться с уравнениями кривых второго порядка. Научиться решать задачи, используя уравнения кривых второго порядка на плоскости.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллипса. Эллипс симметричен относительно осей координат. Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$ называются его вершинами.



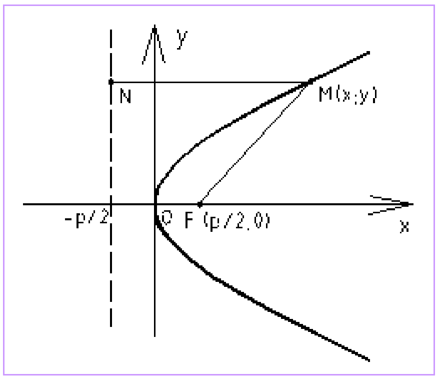
Если $a > b$, то фокусы находятся на оси OX на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от центра эллипса О, если $a < b$, то фокусы находятся на оси OY и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – уравнение окружности, где $O(a, b)$ – центр, R- радиус.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы. Гипербола симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось OX в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ – вершинах гиперболы, и не пересекает оси OY. Параметр a называется вещественной полуосью, b – мнимой полуосью.

Фокусы находятся по формуле $c^2 = a^2 + b^2$. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.



$y^2 = 2px$ – уравнение параболы. Парабола, заданная указанным каноническим уравнением, симметрична относительно оси OX, она имеет фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ и директрису $x = -\frac{p}{2}$. Если вершина параболы перенесена с точку $C(a, b)$, то уравнение примет вид: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$.

Пример №1: Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(3,1)$, которая проходит через точку $A(7,4)$. Чтобы написать уравнение окружности, нужно знать координаты ее центра и радиус. Координаты центра нам известны из условия, а для нахождения радиуса воспользуемся формулой векторной алгебры (нахождение расстояния между двумя точками или длины вектора): $R = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (1-4)^2} =$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Подставим в уравнение окружности координаты центра и радиус

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ и получим ответ:

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

Пример №2: Определить длины полуосей следующих эллипсов:

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ б) $x^2+144y^2=576$ в) $x^2+144y^2=1$

г) $9x^2+4y^2=36$

Приведем все уравнения к общему виду уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и найдем длины полуосей:

а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

$a=5, b=4.$

б) $x^2+144y^2=576$

$\frac{x^2}{576}+\frac{144y^2}{576}=1$

$\frac{x^2}{24^2}+\frac{y^2}{\frac{24^2}{12^2}}=1$

$a=24, b=\frac{24}{12}=2.$

в) $x^2+144y^2=1$

$\frac{x^2}{1}+\frac{144y^2}{1}=1$

$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\frac{1^2}{12^2}}=1$

$a=1, b=\frac{1}{12}.$

г) $9x^2+4y^2=36$

$\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1$

$\frac{x^2}{\frac{6^2}{3^2}}+\frac{y^2}{\frac{6^2}{2^2}}=1$

$a=\frac{6}{3}=2, b=\frac{6}{2}=3.$

Пример №3: Напишите координаты фокуса параболы F и напишите уравнение ее директрисы, если уравнение параболы имеет вид: $y^2=16x$.

Приведем вышеуказанное уравнение к общему виду уравнения параболы $y^2=2px$ и найдем ее параметр p: $y^2=2\cdot 8\cdot x$, из этого следует, что $p=8$. Чтобы найти фокус и директрису параболы подставим параметр p в формулы $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ и $x=-\frac{p}{2}$, получим ответ: $F\left(\frac{8}{2};0\right)$, $F(4;0)$, $x=-\frac{8}{2}=-4$.

Пример №4: Найти координаты фокуса F, вершины C и написать уравнение директрисы параболы: а) $y^2-6y+9=4x$ б) $y^2+2y+9=8x$ в) $y^2=2x+8$ г) $6y=x^2-8x+4$.

Приведем все уравнения к уравнению параболы вида $(y-b)^2=2p(x-a)$ со смещенной вершиной в точку $C(\mathrm{a},b)$ и найдем координаты фокуса F, вершины C и уравнение директрисы:

Для нахождения координат центра воспользуемся формулами сокращенного умножения:

1. Квадрат суммы двух выражений равен: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$

2. Квадрат разности двух выражений равен: $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2-2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$

3. Разность квадратов: $\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$

4. Куб суммы: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3=\mathrm{a}^3+3\mathrm{a}^2\mathrm{b}+3\mathrm{ab}^2+\mathrm{b}^3$

5. Куб разности: $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^3=\mathrm{a}^3-3\mathrm{a}^2\mathrm{b}+3\mathrm{ab}^2-\mathrm{b}^3$

6. Сумма кубов: $\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3=(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}^2-\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)$

7. Разность кубов: $\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)$

а) $y^2-6y+9=4x$

Воспользуемся формулой:

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2-2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$$

$$y^2-2\cdot 3\cdot y+3^2=2\cdot 2\cdot x$$

$$(y-3)^2=2\cdot 2\cdot (x-0)$$

$$C(0,3), p=2, F(1;0), x=-1.$$

б) $y^2+2y+9=8x$

Выделим полный квадрат суммы и воспользуемся формулой: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$

$$y^2+2\cdot 1\cdot y+1^2-1^2+9=8x$$

$$(y+1)^2-1+9=8x$$

$$(y+1)^2+8=8x$$

$$(y+1)^2=8x-8$$

$$(y+1)^2=8(x-1)$$

$$(y+1)^2=2\cdot 4\cdot (x-1)$$

$$C(1,-1), p=4, F(2;0), x=-2.$$

в) $y^2=2x+8$

$$y^2=2(x+4)$$

$$y^2=2\cdot 1\cdot (x+4)$$

$$C(-4,0), p=1, F\left(\frac{1}{2};0\right),$$

$$x=-\frac{1}{2}.$$

г) $6y=x^2-8x+4.$

Выделим полный квадрат разности и воспользуемся формулой: $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2-2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$

$$6y=x^2-2\cdot 4\cdot x+4^2-4^2+4$$

$$6y=(x-4)^2-4^2+4$$

$$6y=(x-4)^2-16+4$$

$$6y=(x-4)^2-12$$

$$6y+12=(x-4)^2$$

$$6(y+2)=(x-4)^2$$

$$6(y+2)=(x-4)^2$$

$$2\cdot 3\cdot (y+2)=(x-4)^2$$

$$C(4,-2), p=3, F(1{,}5;0), x=-1{,}5.$$

Тема 2.1. Понятие функции. Область ее определения, способы задания, свойства.

Цель: Познакомиться с определениями функции, области определения функции, понятиями четности, нечетности и периодичности функций. Научится определять область определения, четность, нечетность, строить графики элементарных функций.

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x.

Область определения функции – это множество всех значений аргумента, на котором задается функция.

График функции $y = f(x)$ - это множество всех точек плоскости, координаты x, у которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

Функция называется чётной, если справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция называется нечётной, если справедливо равенств$f(-x) = -f(x)$ Функции, не принадлежащие ни одной из категорий выше, называются ни чётными, ни нечётными (или функциями общего вида).

Функция называется периодической с периодом T, если справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

Пример №1: Найдите область определения функции, выясните является ли она четной, нечетной или общего вида, и нарисуйте ее график:

а) $y = |x + 2|$ б) $y = x + x^2$ в) $y = \frac{1}{x^2}$ г) $y = 4^{x+2}$ д) $y = \log_5(x + 2)$.

Напомним, что на область определения функции могут накладываться следующие ограничения:

1) подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю;

2) знаменатель не равен нулю;

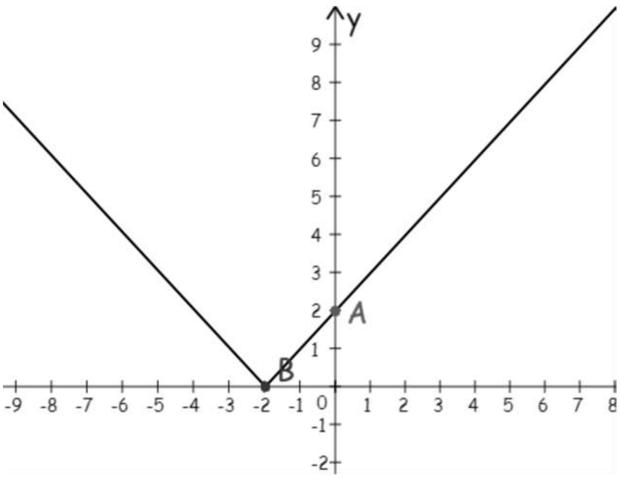
3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля.

а) $y = |x + 2|$

Т.к. ни одно из трех ограничений не подходит к данной функции, можно сделать вывод, что x - любое число, т.е. $D(y)\colon(-\infty;\ \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x)=|-x+2|$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y)\colon(-\infty;\ \infty)$, x для построения графика можно брать любое.



x	y
0	$y=\|0+2\|=\|2\|=2$
-2	$y=\|-2+2\|=\|0\|=0$
-5	$y=\|-5+2\|=\|-3\|=3$

Построим график по данным точкам.

б) $y=x+x^2$

Т.к. ни одно из трех ограничений не подходит к данной функции, можно сделать вывод, что x - любое число, т.е. $D(y)\colon(-\infty;\ \infty)$.

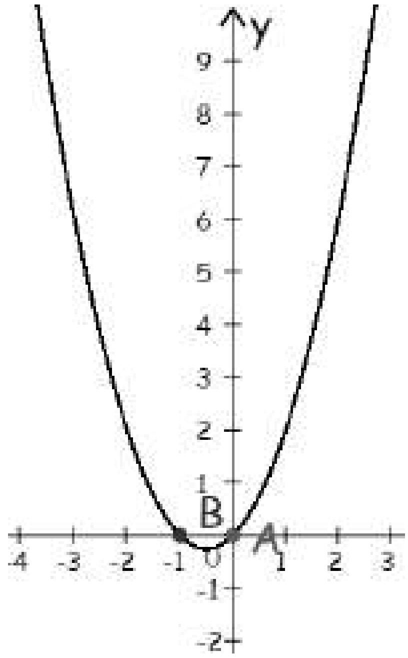
Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$:

$y(-x)=-x+(-x)^2=-x+x^2$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y)\colon(-\infty;\ \infty)$, x для построения графика можно брать любое. При построении параболы сначала находят координаты ее вершины, а затем берут точки симметричные относительно нее. Абсцисса вершины параболы

$y=ax^2+bx+c$ находится по формуле: $x_0=-\frac{b}{2a}$. В данном примере коэффициент при x^2 и x равен 1, т.е. $a=1$ и $b=1$. Найдем вершину параболы: $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot1}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$. Для того чтобы найти ординату вершины параболы подставим x_0 в функцию, получим $y_0 = -0{,}5 + (-0{,}5)^2 = -0{,}5 + +0{,}25 = -0{,}25$.

x	y
-3	$y = -3 + (-3)^2 = -3 + 9 = 6$
-2	$y = -2 + (-2)^2 = -2 + 4 = 2$
-1	$y = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$
$-0{,}5$	$-0{,}25$
0	$y = 0 + 0^2 = 0$
1	$y = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$
2	$y = 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$



Построим график по данным точкам.

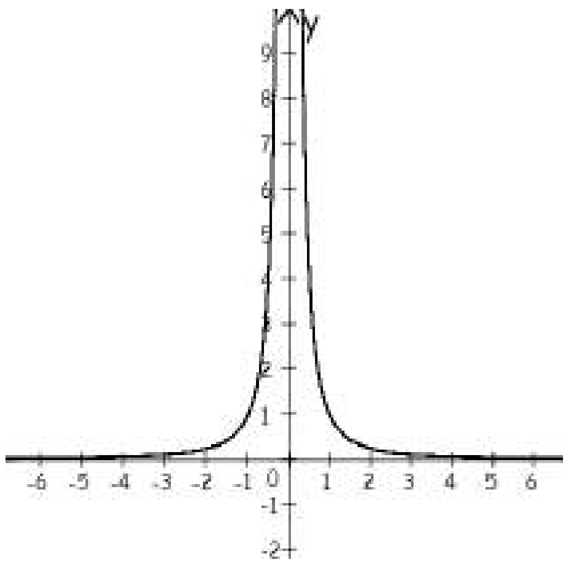
в) $y = \frac{1}{x^2}$

В данном примере (ограничение 2) знаменатель не равен нулю) $x^2 \neq 0$, т.е. $x \neq 0$. Можно сделать вывод, что x - любое число, кроме 0, т.е.

$D(y){:}\,(-\infty;\ 0) \cup (0; \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$. Т.к. справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, то функция является четной. Исходя из того, что $D(y){:}\,(-\infty;\ 0) \cup (0; \infty)$, x для построения графика можно брать любое, кроме 0.

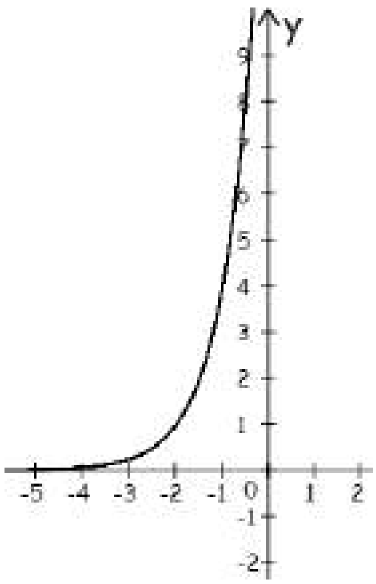
x	y
-2	$y = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
-1	$y = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$
$-\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
$-\frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
$\frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$



$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
1	$y = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$
2	$y = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Построим график по данным точкам.

г) $y = 4^{x+2}$



Т.к. ни одно из трех ограничений не подходит к данной функции, можно сделать вывод, что x - любое число, т.е. $D(y): (-\infty;\ \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = 4^{-x+2}$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y): (-\infty;\ \infty)$, x для построения графика можно брать любое.

x	y
-3	$y = 4^{-3+2} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
-2	$y = 4^{-2+2} = 4^{0} = 1$
-1	$y = 4^{-1+2} = 4^{1} = 4$
0	$y = 4^{0+2} = 4^{2} = 16$

Построим график по данным точкам.

д) $y = \log_5(x+2)$

В данном примере (ограничение 3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля) $x + 2 > 0$, т.е. $x > -2$. Можно сделать вывод, что x - любое число больше -2, т.е. $D(y): (-2; \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = \log_5(-x+2)$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

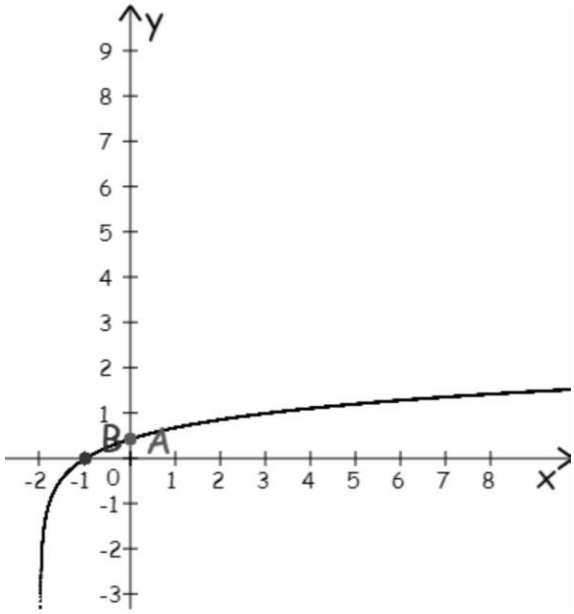
Исходя из того, что $D(y): (-2; \infty)$, x для построения графика можно брать любое больше -2. При построении логарифмической функции будем подбирать такие x, чтобы значения логарифма можно было бы посчитать без калькулятора.

$y = \log_5 5 = 1$, т.е. $x + 2 = 5$, $x = 3$.

$y = \log_5 1 = 0$, т.е. $x + 2 = 1$, $x = -1$.

$y = \log_5 \frac{1}{5} = -1$, т.е. $x + 2 = \frac{1}{5}$,

$x = \frac{1}{5} - 2 == \frac{1-10}{5} = -\frac{9}{5} = -1{,}8$.



Составим таблицу по полученным данным:

x	y
3	$y = 1$
-1	$y = 0$
$-1{,}8$	$y = -1$

Построим график по данным точкам.

Тема 2.2. Предел функции. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы.

Цель: Познакомиться с понятиями предела и непрерывности функции в точке и на бесконечности, видами неопределенностей и способами их устранения. Научиться находить предел функции в точке и на бесконечности.

Предел и непрерывность функции в точке и на бесконечности.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, соответствующая последовательность $f(x_n)$ сходится к b, т.е. $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если она определена в точке a и существует предел, равный значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Прежде всего, перед решением любого предела, обязательно выполняем подстановку «икса» в функцию – неопределённости может и не быть!

Если a - любое число, то справедливы равенства: $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{0}{\infty} = 0$, $\frac{a}{0} = \infty$.

Виды неопределённостей: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$

1.	$sin\,x \sim x$	5.	$1-cos\,x \sim \frac{x^2}{2}$	9.	$log_a(1+x) \sim \frac{x}{lna}$
2.	$arc\,sin\,x \sim x$	6.	$e^x - 1 \sim x$	10.	$(1+x)^a - 1 \sim ax$
3.	$tgx \sim x$	7.	$a^x - 1 \sim x\,lna$	11.	$shx \sim x$
4.	$arctgx \sim x$	8.	$ln(1+x) \sim x$	12.	$thx \sim x$

Пример №1: Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^3+4}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}$.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^3+4}$

Вместо x подставим в предел число 2 и посчитаем его:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^3+4} = \frac{2^2-2}{2^3+4} = \frac{4-2}{8+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

В рассмотренном примере неопределенности нет.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}$

Вместо x подставим в предел число 1 и посчитаем его:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1^2-1}{1^3-1^2+1-1} = \frac{1-1}{1-1+1-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Это неопределенность, чтобы она исчезла нужно выполнить те или иные преобразования (разложение на множители и сокращение дроби).

Разложить на множители многочлен можно несколькими способами:

1) с помощью формул сокращенного умножения:

1. Квадрат суммы двух выражений равен: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Квадрат разности двух выражений равен: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

4. Куб суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5. Куб разности: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

7. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) вынесением общего множителя.

3) квадратный трехчлен раскладывается с помощью дискриминанта по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В данном примере числитель раскладывается по формуле сокращенного умножения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, получим:

$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$,

а знаменатель - вынесением общего множителя:

$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$.

Подставим полученные выражения в предел, сократим дробь и снова подставим 1: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1+1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$.

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}$

Вместо x подставим в предел число 2 и посчитаем его:

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2^2-5\cdot2+6} = \frac{\sqrt{4}-2}{4-10+6} = \frac{2-2}{-6+6} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Это неопределенность, чтобы она исчезла нужно выполнить те или иные преобразования. В данном примере числитель умножаем и делим на сопряженное выражение $\sqrt{x+2}+2$ (для получения формулы разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ и избавления от корня), получим:

$$\sqrt{x+2} - 2 = \frac{(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{x+2-4}{(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x-2)}{(\sqrt{x+2}+2)}.$$

Знаменатель разложим с помощью формулы квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. В первую очередь пользуясь формулой дискриминанта найдем корни квадратного трехчлена:

$x^2-5x+6=0$

$a=1, b=-5, c=6$

$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$

$x^2-5x+6=1\cdot(x-3)(x-2)=(x-3)(x-2)$

Подставим полученные выражения в предел, сократим дробь и снова подставим 2:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{\frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(x-3)(x-2)}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{(\sqrt{x+2}+2)(x-3)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)(x-3)}=\frac{1}{(\sqrt{2+2}+2)(2-3)}=\frac{1}{(\sqrt{4}+2)(-1)}=\frac{1}{(2+2)(-1)}=\frac{1}{4(-1)}=-0{,}25$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}$

Вместо x подставим в предел ∞, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\frac{1+4\cdot\infty-\infty^2}{4\cdot\infty^2+\infty+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Это неопределенность. При вычислении пределов, стремящихся к бесконечности, изначально определяют старшую степень многочлена и делят на переменную в данной степени. В приведенном выше многочлене старшая степень равна 2. Разделим каждый член многочлена на x^2, сократим дроби и снова подставим ∞:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1}{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty^2}+\frac{4}{\infty}-1}{4+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}$. Из равенства $\frac{a}{\infty}=0$, где a - любое число следует, что $\frac{1}{\infty^2},\frac{4}{\infty},\frac{1}{\infty},\frac{1}{\infty^2}$ стремятся к 0,т.е. предел равен:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1}{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty^2}+\frac{4}{\infty}-1}{4+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=-\frac{1}{4}=-0{,}25.$$

При вычислении пределов многочленов, стремящихся к бесконечности, достаточно определить многочлен старшей степени числителя и знаменателя, а остальные многочлены младшей степени отбросить. Это упростит запись решения:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\frac{1+4\cdot\infty-\infty^2}{4\cdot\infty^2+\infty+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{4x^2}=-\frac{1}{4}=-0{,}25.$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}$

Вместо x подставим в предел ∞, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}=\frac{\infty^2\cdot\left(\sqrt{\infty^3+1}-\sqrt{\infty^3-1}\right)}{\sqrt{4\cdot\infty+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Это неопределенность. При вычислении пределов, стремящихся к бесконечности, изначально определяют старшую степень многочлена и делят на переменную в данной степени. В приведенном выше примере нельзя определить многочлен старшей степени числителя, пока не избавимся от разности корней, поэтому числитель умножаем и делим на сопряженное выражение $\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)$ (для получения формулы разности квадратов: $\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$ и избавления от корня), получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^3-1}\right)^2\right)}{\sqrt{(4x+1)(x^3+1)}+\sqrt{(4x+1)(x^3-1)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^3+1-x^3+1)}{\sqrt{4x^4+4x+x^3+1}+\sqrt{4x^4-4x+x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Многочленом старшей степени выражений $\sqrt{4x^4+4x+x^3+1}$ и $\sqrt{4x^4-4x+x^3-1}$ является $4x^4$ все остальные многочлены младшей степени отбросим, получим:

$$\sqrt{4x^4+4x+x^3+1}=\sqrt{4x^4}=2x^2,\ \sqrt{4x^4-4x+x^3-1}=\sqrt{4x^4}=2x^2.$$

Пример №2: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x arcsin(5x)}$.

Вместо x подставим в предел 0, получим:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x arcsin(5x)}=\frac{1-\cos 3\cdot 0}{0\cdot arcsin(5\cdot 0)}=\frac{1-\cos 0}{0\cdot \arcsin 0}=\frac{1-1}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Это неопределенность. Для вычисления пределов тригонометрических функций при $x\to 0$ используют таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

По 5 формуле ($1-cos\,x\sim\frac{x^2}{2}$) выражение $1-\cos 3x=\frac{(3x)^2}{2}=\frac{9x^2}{2}$, по 2 формуле ($arc\,sin\,x\sim x$) выражение $arcsin(5x)=5x$. Полученные данные подставим в предел, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x arcsin(5x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}}{x\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{10x^2}=\frac{9}{10}=0{,}9.$$

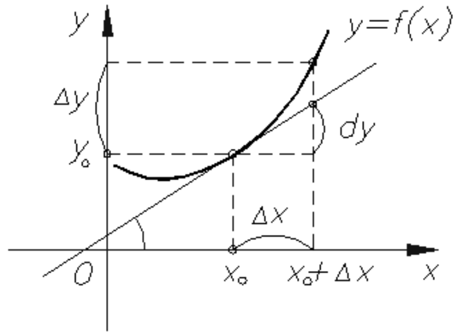
Тема 2.3. Производная и ее геометрический смысл. Правила дифференцирования.

Цель: Познакомиться с понятиями производной, геометрического смысла производной, уравнениями касательной и нормали. Научиться находить производные элементарных и сложных функций, с помощью производной составлять уравнение касательной и нормали к графику функции.

Производная функции − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Обратная операция − восстановление функции по известной производной − называется интегрированием. Производная функции в некоторой точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Оценку скорости изменения можно получить, вычислив отношение изменения функции Δy к соответствующему изменению аргумента Δx.

В определении производной такое отношение рассматривается в пределе при условии $\Delta x\to 0$. Перейдем к более строгой формулировке: приращением аргумента называется разность между двумя значениями аргумента: "новым" и "старым". Обычно обозначается как $\Delta x=x_1-x_0$.

Производной $y'(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть:



$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(C)' = 0$ (C-любое число)	8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
2. $(x)' = 1$	9. $(\sin x)' = \cos x$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10. $(\cos x)' = -\sin x$	17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
4. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α-любое число)	11. $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	18. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
5. $(e^x)' = e^x$	12. $(ctg\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$	19. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$ (a-любое число)	13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

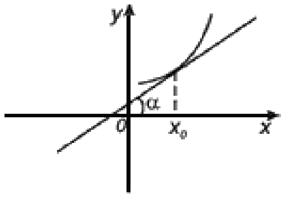
Правила дифференцирования функций.

Правило	Формула
1. Постоянный множитель с можно выносить за знак производной.	$\left(cu(x)\right)' = cu'(x)$
2. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то производная от суммы (разности) функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме (разности) производных.	$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$
3. Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то выполняются следующие правила дифференцирования произведения функций и частного от их деления:	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$
4. Производная сложной функции равна производной внешней функции умноженной на производную внутренней функции.	$\left(u(v)\right)' = u'(v) \cdot v'$

Геометрический смысл производной.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0, равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке:

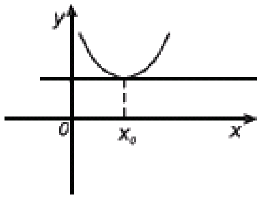
$$f^{/}(x) = tg\ \alpha = k.$$



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

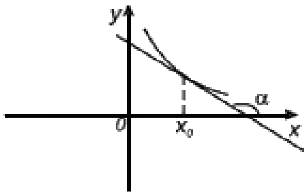
$$y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0).$$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f^{/}(x_0)}(x - x_0).$$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

Пример №1: Найти производную функции: а) $y = \frac{1}{x}$ б) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

в) $y = \frac{ctg\ x}{4}$ г) $y = \frac{\ln x}{3x^2+4}$ д) $y = \sin(x^2)$ е) $y = tg^3(\sqrt{x})$.

а) $y = \frac{1}{x}$

Находим производную с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Напомним одно из свойств степеней $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (т.е. $\frac{1}{x} = x^{-1}$). Получим:

$$y^{/} = \left(\frac{1}{x}\right)^{/} = (x^{-1})^{/} = (-1) \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

б) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

Находим производную с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Напомним, что корень всегда можно представить в виде степени с рациональным показателем (т.е. $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$) и одно из свойств степеней $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (т.е. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$). Получим:

$$y^{/} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)^{/} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{/} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{-1-3}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

в) $y = \frac{ctg\,x}{4}$

Находим производную с помощью формулы: $(ctg\,x)^/ = -\frac{1}{sin^2 x}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций», не забываем, что константу можно вынести за знак производной, получим:

$$y^/ = \left(\frac{ctg\,x}{4}\right)^/ = \frac{1}{4}\cdot(ctg\,x)^/ = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{sin^2 x}\right) = -\frac{1}{4sin^2 x}\,.$$

г) $y = \frac{\ln x}{3x^2+4}$

Находим производную с помощью формул: $(\ln x)^/ = \frac{1}{x}$, $(x^\alpha)^/ = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $(C)^/ = 0$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования частного функций: $\left(\frac{u}{v}\right)^/ = \frac{u^/v-uv^/}{v^2}$, суммы (разности) функций: $\left(u(x)\pm v(x)\right)^/ = u^/(x)\pm v^/(x)$, не забываем, что константу можно вынести за знак производной, получим:

$$y^/ = \left(\frac{\ln x}{3x^2+4}\right)^/ = \frac{(\ln x)^/\cdot(3x^2+4)-\ln x\cdot(3x^2+4)^/}{(3x^2+4)^2} = \frac{\frac{1}{x}(3x^2+4)-\ln x\left(3\cdot 2\cdot x^{2-1}+(4)^/\right)}{(3x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(3x^2+4)-\ln x\cdot 6x}{(3x^2+4)^2}$$

д) $y = \sin(x^2)$

Находим производную, с помощью формулы: $(\sin x)^/ = \cos x$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. под знаком тригонометрической функции находится не просто x, а x^2), поэтому мы будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней. Напомним, что производная степенной функции находится по формуле $(x^\alpha)^/ = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ (т.е. $(x^2)^/ = 2\cdot x^{2-1} = 2x$), получим:

$$y^/ = (\sin(x^2))^/ = \cos x^2\cdot(x^2)^/ = \cos x^2\cdot 2\cdot x^{2-1} = 2x\cos x^2.$$

е) $y = tg^3\left(\sqrt{x}\right)$

Находим производную, с помощью формулы: $(x^\alpha)^/ = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. основанием степенной функции является не просто x, а

$tg\,\sqrt{x}$; под знаком тригонометрической функции находится не просто x, а $\sqrt{x}$), поэтому мы будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней. Напомним, что $(tg\,x)^{/} = \frac{1}{cos^2 x}$, $\left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, получим:

$$y^{/} = \left(tg^3\left(\sqrt{x}\right)\right)^{/} =$$

$$= 3 \cdot tg^{3-1}\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(tg\,\sqrt{x}\right)^{/} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{/} = 3tg^2\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3tg^2\left(\sqrt{x}\right)}{2cos^2\sqrt{x}}.$$

Пример №2: Пример: Написать уравнение касательной и нормали к графику функции

$y = \sqrt{x+3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 6$.

Для составления уравнений касательной и нормали найдем производную функции, значение функции и ее производной в точке $x_0 = 6$:

$y^{/} = \left(\sqrt{x+3}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot (x+3)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$, $y^{/}(6) = \frac{1}{2\sqrt{6+3}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$,

$y(6) = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3.$

Подставим полученные данные в формулу: $y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$.

$y = 3 + \frac{1}{6}(x-6)$

$y = 3 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \cdot 6$

$y = 3 + \frac{1}{6}x - 1$

$y = \frac{1}{6}x + 2$ - уравнение касательной.

Подставим полученные данные в формулу: $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0) - \frac{1}{\mathrm{f}^{/}(\mathrm{x}_0)}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$.

$y = 3 - \frac{1}{\frac{1}{6}}(x-6)$

$y = 3 - 6(x-6)$

$y = 3 - 6x + 36$

$y = 39 - 6x$ - уравнение нормали.

Тема 2.4. Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции. Точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значения функций.

Цель: Познакомиться с планом проведения исследования функции и алгоритмом нахождения асимптот функции. Научиться проводить исследование функции и строить ее график с помощью производной.

Применение производной к исследованию функций.

1) Область определения

2) Выяснить является ли функция четной, нечетной или общего вида.

3) Точки пересечения с осями координат и интервалы, где $y > 0, y < 0$.

4) Нахождение асимптот функции. Если функция имеет вид: $y(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots b_m}$, тогда:

1. если n<m, то график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

2. если n=m, то график имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{a_0}{b_0}$.

3. если $n = m + 1$, то график имеет наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}$,

$b = \lim\limits_{x \to \infty} y(x) - kx$.

4) Вертикальные асимптоты определяют корни знаменателя

5) Находим точки максимума и минимума функции, значение функции в них и промежутки возрастания и убывания функции.

Если $y^{/}(x) > 0$, то функция возрастает, если $y^{/}(x) < 0$, то функция убывает.

Пусть a- корень уравнения $y^{/}(x) = 0$.

Если при переходе через точку a, производная меняет знак с "-" на "+", то a - точка минимума функции.

Если при переходе через точку a, производная меняет знак с "+" на "-", то a - точка максимума функции.

6) Находим точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

Если $y^{//}(x) > 0$, то функция выпукла вниз, если $y^{//}(x) < 0$, то выпукла вверх.

Пусть a- корень уравнения $y^{//}(x) = 0$.

Если при переходе через точку a, вторая производная меняет знак, то a- точка перегиба функции.

7) Строим график функции.

Пример №1: Найти асимптоты графиков функций: а) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ б) $y = \frac{4x^2-1}{3x^2+1}$

в) $y = \frac{x^2}{x-2}$ г) $y = \frac{x^4}{x-1}$ д) $y = \frac{x^4}{x^2+1}$.

Воспользуемся приведенным выше правилом (n - старшая степень многочлена в числителе, m - старшая степень многочлена в знаменателе).

а) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$

$n = 2, m = 3, n < m$, следовательно график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. $x = -1$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

б) $y = \frac{4x^2-1}{3x^2+1}$

$n = 2, m = 2, n = m$, следовательно график имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{a_0}{b_0} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Вертикальных асимптот нет (т.к. знаменатель не имеет корней $3x^2 + 1 \neq 0$).

в) $y = \frac{x^2}{x-2}$

$n = 2, m = 1, n = m + 1$, следовательно график имеет наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (напомним, что при вычислении пределов многочленов, стремящихся к бесконечности, достаточно определить многочлен старшей степени числителя и знаменателя, а остальные многочлены младшей степени отбросить).

$$b = \lim_{x\to\infty} y(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} - 1 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+2x}{x-2} =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = \frac{2x}{x} = 2$. Наклонная асимптота имеет вид: $y = 1 \cdot x + 2$, т.е. $y = x + 2$. $x = 2$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

г) $y = \frac{x^4}{x-1}$

$n = 4, m = 1, n > m + 1$, следовательно, график не имеет горизонтальных и наклонных асимптот. $x = 1$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

д) $y = \frac{x^4}{x^2+1}$

$n = 4, m = 1, n > m + 1$, следовательно, график не имеет горизонтальных и наклонных асимптот. Вертикальных асимптот нет (т.к. знаменатель не имеет корней $x^2 + 1 \neq 0$).

Пример №2: Найти интервалы возрастания и убывания, точки экстремума (максимума, минимума) функции: $y = x^3(4 - x)$.

Находим производную функции с помощью формул: $(C)^/ = 0$, $(x^\alpha)^/ = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $(x)^/ = 1$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования произведения функций: $(u \cdot v)^/ = u^/v + uv^/$, суммы (разности) функций: $\left(u(x) \pm v(x)\right)^/ = u^/(x) \pm v^/(x)$:

$y^/ = \left(x^3(4 - x)\right)^/ = (x^3)^/ \cdot (4 - x) + x^3 \cdot (4 - x)^/ = 3x^2(4 - x) + x^3(-1) =$

$= 12x^2 - 3x^3 - x^3 = 12x^2 - 4x^3.$

Приравняем производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

$12x^2 - 4x^3 = 0$

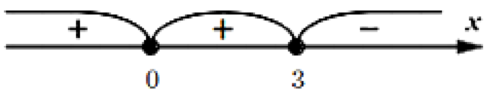
$4x^2(3 - x) = 0$

$4x^2 = 0$ или $3 - x = 0$

$x^2 = 0$ или $-x = -3$

$x = 0$ или $x = 3$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак производной:

$-1 \in (-\infty; 0)$: $y^/(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1)^3 = 12 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 12 + 4 = 16$

$16 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$1 \in (0; 3)$: $y^{/}(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^3 = 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8$

$8 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$4 \in (3; \infty)$: $y^{/}(4) = 12 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4^3 = 12 \cdot 16 - 4 \cdot 64 = 192 - 256 = -64$

$-64 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

При переходе через точку 3, производная меняет знак с "+" на "-", т.е. 3 - точка максимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(3) = 3^3(4 - 3) = 27 \cdot 1 = 27.$

Подведем итоги:

$y \uparrow$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

$y \downarrow$ при $x \in (3; \infty)$

$x_{max} = 3, y_{max} = 27.$

Точек минимума нет.

Пример №3: Найти интервалы, на которых функция выпукла вверх и выпукла вниз, а также точки перегиба функции: $y = x^3(4 - x)$.

Из предыдущего примера: $y^{/} = 12x^2 - 4x^3$. Находим вторую производную функции с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций», получим:

$y^{//} = (12x^2 - 4x^3)^{/} = 12 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 24x - 12x^2.$

Приравняем вторую производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

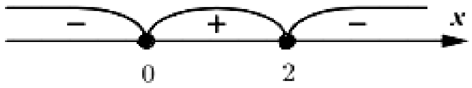
$24x - 12x^2 = 0$

$12x(2 - x) = 0$

$12x = 0$ или $2 - x = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак второй производной:

$-1 \in (-\infty; 0)$: $y^{//}(-1) = 24 \cdot (-1) - 12 \cdot (-1)^2 = -24 - 12 = -36$

$-36 < 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция выпукла вверх.

$1 \in (0; 2)$: $y^{//}(1) = 24 \cdot 1 - 12 \cdot 1^2 = 24 - 12 = 12$

$12 > 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция выпукла вниз.

$3 \in (2; \infty)$: $y^{//}(3) = 24 \cdot 3 - 12 \cdot 3^2 = 72 - 12 \cdot 9 = 72 - 108 = -36$

$-36 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция выпукла вверх.

При переходе через точки 0 и 2, вторая производная меняет знак, значит 0 и 2 - точки перегиба функции.

Подведем итоги:

$y_{\text{вып.вв.}}$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

$y_{\text{вып.вн.}}$ при $x \in (0; 2)$

$x = 0, x = 2$ - точки перегиба.

Пример №4: Исследовать и построить график функции с помощью производной: $y = \frac{(x-1)^2}{x+3}$. Воспользуемся приведенным выше планом исследования:

1) Область определения.

Напомним, что на область определения функции могут накладываться следующие ограничения:

1) подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю;

2) знаменатель не равен нулю;

3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля.

В данном примере (ограничение 2) знаменатель не равен нулю) $x+3 \neq 0$, т.е. $x \neq -3$. Можно сделать вывод, что x - любое число, кроме 0 , т.е. $D(y): (-\infty;\ -3) \cup (-3; \infty)$.

2) Выяснить является ли функция четной, нечетной или общего вида.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = \frac{(-x-1)^2}{-x+3} = \frac{(-1)^2(x+1)^2}{3-x} = \frac{(x+1)^2}{3-x}$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

3) Точки пересечения с осями координат и интервалы, где $y > 0, y < 0$.

Приравняем функцию к нулю и найдем корни данного уравнения:

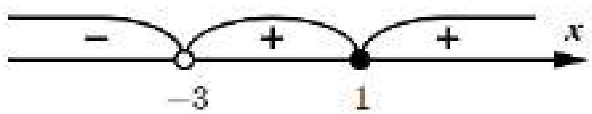
$\frac{(x-1)^2}{x+3} = 0$

$(x-1)^2 = 0$ или $x+3 \neq 0$

$x-1=0$ или $x \neq -3$

$x = 1$ или $x \neq -3$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак функции:

$-4 \in (-\infty; -3): y(-4) = \frac{(-4-1)^2}{-4+3} = \frac{(-5)^2}{-1} = \frac{25}{-1} = -25$

$-25 < 0$, следовательно функция на данном промежутке имеет знак "-" и находится ниже оси Ox.

$0 \in (-3; 1): y(0) = \frac{(0-1)^2}{0+3} = \frac{(-1)^2}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} > 0$, следовательно функция на данном промежутке имеет знак "+" и находится выше оси Ox.

$2 \in (1; \infty): y(2) = \frac{(2-1)^2}{2+3} = \frac{1^2}{5} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} > 0$, следовательно функция на данном промежутке имеет знак "+" и находится выше оси Ox.

Найдем точки пересечения с осями координат.

С осью Ox (т. е. $y = 0$)

$\frac{(x-1)^2}{x+3} = 0$

$(x-1)^2 = 0$ или $x + 3 \neq 0$

$x - 1 = 0$ или $x \neq -3$

$x = 1$ или $x \neq -3$ (в точке $x \neq -3$ нет пересечения с осями)

С осью Oy (т. е. $x = 0$)

$y = \frac{(0-1)^2}{0+3} = \frac{(-1)^2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$

Подведем итоги:

$y > 0$ при $x \in (-3; 1) \cup (1; \infty)$

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -3)$

пересечение с осью Ox в точке $(1; 0)$

пересечение с осью Oy в точке $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

4) Нахождение асимптот функции.

$y = \frac{(x-1)^2}{x+3} = \frac{x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2}{x+3} = \frac{x^2-2x+1}{x+3}$

$n = 2, m = 1, n = m + 1$, следовательно график имеет наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x+1}{x+3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (напомним, что при вычислении пределов многочленов, стремящихся к бесконечности, достаточно определить многочлен старшей степени числителя и знаменателя, а остальные многочлены младшей степени отбросить).

$b = \lim\limits_{x\to\infty} y(x) - kx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x+3} - 1\cdot x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1-x(x+3)}{x+3} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-3x}{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5x+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5x}{x} = -5$.

Наклонная асимптота имеет вид: $y = 1\cdot x - 5$, т.е. $y = x - 5$. $x = -3$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

5) Находим точки максимума и минимума функции, значение функции в них и промежутки возрастания и убывания функции.

Находим производную функции с помощью формул: $(C)^{/}=0$, $(x)^{/}=1$, $(x^{\alpha})^{/}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования частного функций: $\left(\frac{u}{v}\right)^{/}=\frac{u^{/}v-uv^{/}}{v^{2}}$, суммы (разности) функций: $\big(u(x)\pm v(x)\big)^{/}=u^{/}(x)\pm v^{/}(x)$:

$$y^{/}=\left(\frac{x^2-2x+1}{x+3}\right)^{/}=\frac{(x^2-2x+1)^{/}\cdot(x+3)-(x^2-2x+1)\cdot(x+3)^{/}}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{(2x^{2-1}-2\cdot 1)(x+3)-(x^2-2x+1)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{(2x-2)(x+3)-(x^2-2x+1)}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+6x-2x-6-x^2+2x-1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}$$

Приравняем производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

$\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}=0$

$x^2+6x-7=0$ или $(x+3)^2\neq 0$

$a=1, b=6, c=-7$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot 1\cdot(-7)=36+28=64$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-6+8}{2}=\frac{2}{2}=1$

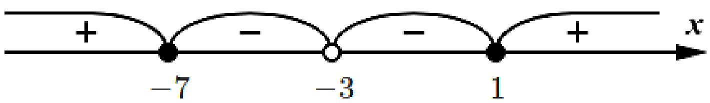
$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-6-8}{2}=-\frac{14}{2}=-7$

$(x+3)^2\neq 0$

$x+3\neq 0$

$x\neq -3$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак производной:

$-8\in(-\infty;-7)$: $y^{/}(-8)=\frac{(-8)^2+6\cdot(-8)-7}{(-8+3)^2}=\frac{64-48-7}{(-5)^2}=\frac{9}{25}$

$\frac{9}{25}>0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$-4 \in (-7;-3)$: $y^{/}(-4) = \frac{(-4)^2+6\cdot(-4)-7}{(-4+3)^2} = \frac{16-24-7}{(-1)^2} = -\frac{15}{1} = -15$

$-15 < 0$, следовательно производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$0 \in (-3;1)$: $y^{/}(0) = \frac{0^2+6\cdot 0-7}{(0+3)^2} = \frac{-7}{(3)^2} = -\frac{7}{9}$

$-\frac{7}{9} < 0$, следовательно производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$2 \in (1;\infty)$: $y^{/}(2) = \frac{2^2+6\cdot 2-7}{(2+3)^2} = \frac{4+12-7}{(5)^2} = \frac{9}{25}$

$\frac{9}{25} > 0$, следовательно производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

При переходе через точку -7, производная меняет знак с "+" на "-", т.е. -7 - точка максимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(-7) = \frac{(-7-1)^2}{-7+3} = \frac{(-8)^2}{-4} = -\frac{64}{4} = -16.$

При переходе через точку 1, производная меняет знак с "-" на "+", т.е. 1 - точка минимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(1) = \frac{(1-1)^2}{1+3} = \frac{0^2}{4} = 0.$

Подведем итоги:

$y \uparrow$ при $x \in (-\infty;-7) \cup (1;\infty)$

$y \downarrow$ при $x \in (-7;-3) \cup (-3;1)$

$x_{max} = -7, y_{max} = -16$

$x_{min} = 1, y_{min} = 0.$

6) Находим точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

Из предыдущего пункта: $y^{/} = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}$. Находим вторую производную функции с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования частного функций:

$\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{u^{/}v-uv^{/}}{v^2}$, суммы (разности) функций:

$\left(u(x) \pm v(x)\right)^{/} = u^{/}(x) \pm v^{/}(x)$:

$$y^{//} = \left(\frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}\right)^{/} = \frac{(x^2+6x-7)^{/}\cdot(x+3)^2-(x^2+6x-7)\cdot((x+3)^2)^{/}}{((x+3)^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x^{2-1}+6\cdot1)(x+3)^2-(x^2+6x-7)\cdot2(x+3)^{2-1}\cdot(x+3)^{/}}{(x+3)^4} =$$

$$= \frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x-7)\cdot2(x+3)\cdot1}{(x+3)^4} = \frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x^2+6x-7)(x+3)}{(x+3)^4}.$$

Приравняем вторую производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

$$\frac{(2x+6)(x+3)^2-2(x^2+6x-7)(x+3)}{(x+3)^4} = 0$$

$(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2+6x-7)(x+3) = 0$ или $(x+3)^4 \neq 0$

Разделим данное выражение на $x+3$:

$$\frac{(2x+6)(x+3)^2}{x+3} - \frac{2(x^2+6x-7)(x+3)}{x+3} = 0$$

$(2x+6)(x+3) - 2(x^2+6x-7) = 0$

$2x^2 + 6x + 6x + 18 - 2x^2 - 12x + 14 = 0$

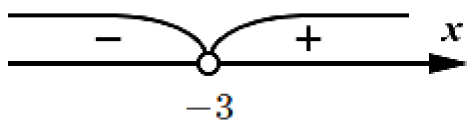
$32 \neq 0$ - решений нет.

$(x+3)^4 \neq 0$

$x + 3 \neq 0$

$x \neq -3$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак второй производной:

$$-4 \in (-\infty;-3): y^{//}(-4) = \frac{(2\cdot(-4)+6)(-4+3)^2-2((-4)^2+6\cdot(-4)-7)(-4+3)}{(-4+3)^4} =$$

$$= \frac{(-2)(-1)^2-2(16-24-7)(-1)}{(-1)^4} = \frac{-2+2\cdot(-15)}{1} = -32$$

$-32 < 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция выпукла вверх.

$0 \in (-3; \infty)$: $y^{//}(0) = \frac{(2 \cdot 0+6)(0+3)^2 - 2(0^2+6 \cdot 0-7)(0+3)}{(0+3)^4} = \frac{6 \cdot 3^2 - 2 \cdot (-7) \cdot 3}{3^4} = \frac{54+42}{81} = \frac{96}{81} = 1\frac{5}{27}$

$1\frac{5}{27} > 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция выпукла вниз.

Т.к. вторая производная не имеет корней $(x \neq -3)$, то точек перегиба нет.

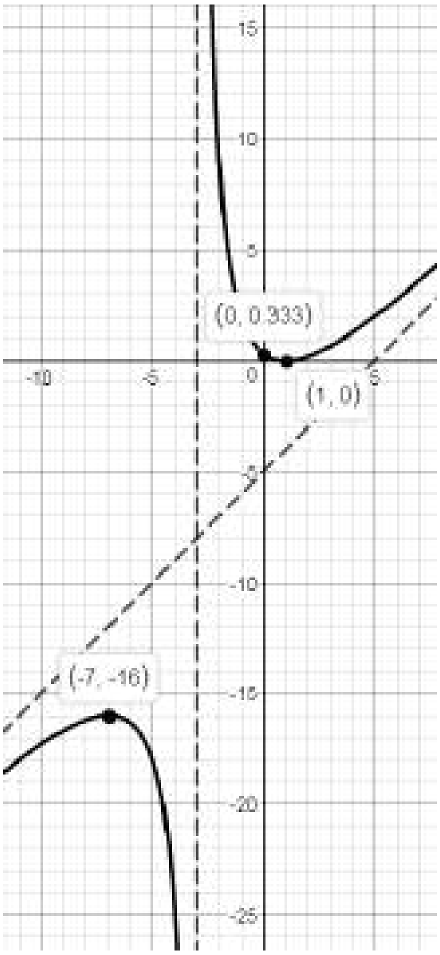
Подведем итоги:

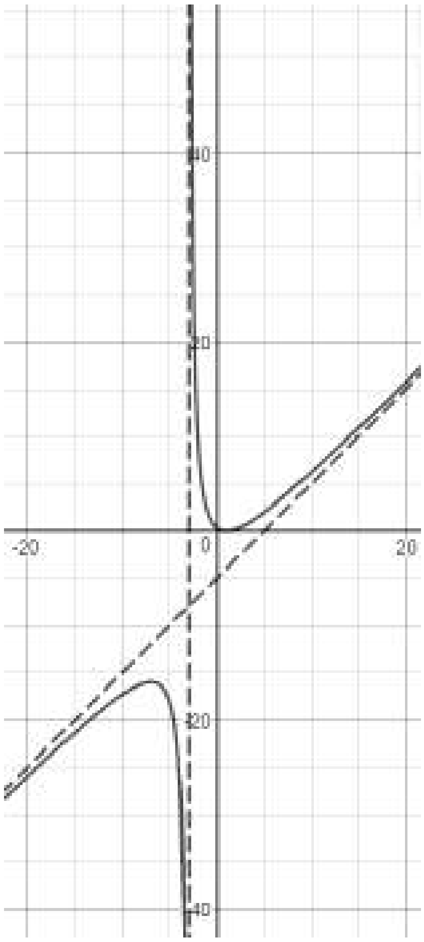
$y_{\text{вып.вв.}}$ при $x \in (-\infty; -3)$

$y_{\text{вып.вн.}}$ при $x \in (-3; \infty)$

точек перегиба нет.

7) Строим график функции.





Тема 3.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов.

Цель: Познакомиться с понятием первообразной. Научиться находить первообразные функций, неопределенные интегралы.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F^{/}(x) = f(x)$.

Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределённого интеграла, а сам процесс называется интегрированием.

Таблица неопределенных интегралов

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = f(x)$
$\int 1\,dx$	$x + C$
$\int x^{\alpha}\ dx$, где $\alpha \in N, \alpha \neq -1, (\alpha -$ число)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$ln\,x + C$
$\int e^{x}\,dx$	$e^{x} + C$
$\int \sin x\,dx$	$-cos\,x + C$
$\int \cos x\,dx$	$sin\,x + C$
$\int \frac{1}{sin^2 x} dx$	$-ctg\ x + C$
$\int \frac{1}{cos^2 x} dx$	$tg\ x + C$
$\int (kx + b)^{p}\ dx$, где $p \neq -1, k \neq 0, (p, k -$ числа)	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\int \frac{1}{(kx+b)}\ dx$, где $k \neq 0$, $(k -$ число)	$\frac{1}{k} ln(kx + b) + C$
$\int e^{kx+b}\ dx$, где $k \neq 0$, $(k -$ число)	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\int \sin(kx + b)\,dx$ где $k \neq 0$, $(k -$ число)	$-\frac{1}{k} cos(kx + b) + C$
$\int \cos(kx + b)\,dx$ где $k \neq 0$, $(k -$ число)	$\frac{1}{k} sin(kx + b) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$arcsinx\ +\ C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$arctgx +\ C$

$\int a^x\,dx$,где ($a -$ число)	$\frac{a^x}{ln\,a}+C$
$\int \mathrm{ch}\,x\,dx$	$\mathrm{sh}\,x+C$
$\int \mathrm{sh}\,x\,dx$	$\mathrm{ch}\,x+C$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}\,dx$	$\mathrm{th}\,x+C$
$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2\,x}\,dx$	$-\mathrm{cth}\,x+C$
$\int tg\,x\,dx$	$-ln\lvert cosx\rvert+C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$, где ($a -$ число)	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$, где ($a -$ число)	$\frac{1}{2a}ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
$\int \frac{x}{x^2\pm a^2}\,dx$, где ($a -$ число)	$\frac{1}{2}ln\lvert x^2\pm a^2\rvert+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx$, где ($a -$ число)	$ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2\pm x^2}}\,dx$, где ($a -$ число)	$arcsin\frac{x}{a}+C$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx$, где ($a -$ число)	$\sqrt{x^2\pm a^2}+C$
$\int \frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}\,dx$, где ($a -$ число)	$-\sqrt{a^2\pm x^2}+C$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, где ($a -$ число)	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a}+C$
$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx$, где ($a -$ число)	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$

Пример №1: Для функции $\cos x$ найти такую первообразную функцию $F(x)$, что $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=10.$

По «Таблице неопределенных интегралов» найдем первообразную $\cos x$: $F(x)=sin\,x+C$ и подставим значения условия $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=10$, получим (напомним, что по таблице значений углов тригонометрических функций $sin\frac{\pi}{2}=1$):

$10=sin\frac{\pi}{2}+C$

$10=1+C$

$C=9$, т.е. искомая первообразная имеет вид: $F(x)=sin\,x+9$.

Пример №2: Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x^2-2x+5}{x}dx$ б) $sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ в) $tg^2x\, dx$.

а) $\int \frac{3x^2-2x+5}{x}dx$

Для начала упростим данное выражение (почленно разделим числитель на x): $\int \frac{3x^2-2x+5}{x}dx = \int \left(\frac{3x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{5}{x}\right)dx = \int \left(3x - 2 + 5\frac{1}{x}\right)dx$

Находим интегралы с помощью формул: $\int 1dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\int \frac{1}{x}dx = ln\, x + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», получим:

$$\int \left(3x - 2 + 5\frac{1}{x}\right)dx = 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + 5 \cdot ln\, x + C = \frac{3x^2}{2} - 2x + 5\, ln\, x + C.$$

б) $sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

Для начала упростим данное выражение (воспользуемся формулой половинного угла функции $sin\, x$: $sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$):

$$\int sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right)dx$$

Находим интегралы с помощью формул: $\int 1dx = x + C$, $\int \cos x\ dx = sin\, x + \mathrm{C}$ из «Таблицы неопределенных интегралов», получим:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}sin\, x + \mathrm{C}.$$

в) $tg^2x\, dx$

Для начала упростим данное выражение (воспользуемся тригонометрическим тождеством: $tg^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$):

$$\int tg^2x\ dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$$

Находим интегралы с помощью формул: $\int 1dx = x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tg\ x + \mathrm{C}$ из «Таблицы неопределенных интегралов», получим:

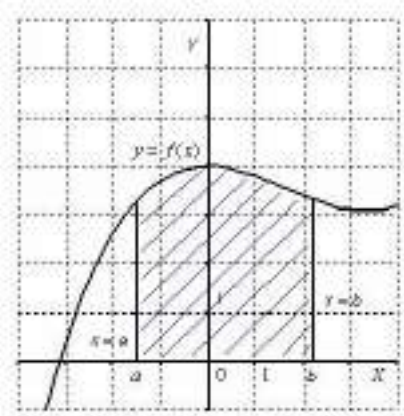
$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = tg\ x - x + \mathrm{C}.$$

Тема 3.2. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Площадь криволинейной трапеции.

Цель: Познакомиться с понятием определенного интеграла. Научиться находить определенные интегралы и применять интеграл для вычисления площадей с помощью формулы Ньютона— Лейбница.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ох, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, находят по формуле Ньютона-Лейбница:

$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b)$.



С точки зрения геометрии определенный интеграл – это площадь фигуры.

Пример №1: Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a, x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

а) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$

б) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$

в) $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{2\pi}{3}, f(x) = sin\,x$

а) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$

Чтобы найти определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b)$, надо: найти неопределенный интеграл с помощью формулы: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», подставить значение верхней границы и вычесть значение нижней.

$\int_2^4 x^3 dx = \left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)|_2^4 = \left(\frac{x^4}{4}\right)|_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60.$

б) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$

Чтобы найти определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$S=\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a)-F(b)$, надо: найти неопределенный интеграл с помощью формул: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ и $\int 1dx = x+C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», подставить значение верхней границы и вычесть значение нижней.

$$\int_{-2}^{1}(x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}+x\right)|_{-2}^{1} = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)|_{-2}^{1} = \frac{1^3}{3}+1-\frac{(-2)^3}{3}-(-2) =$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}+3=\frac{9}{3}+3=3+3=6$$

в) $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2\pi}{3}$, $f(x)=sin\,x$

Чтобы найти определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$S=\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a)-F(b)$, надо: найти неопределенный интеграл с помощью формулы: $\int \sin x\ dx = -cos\,x + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», подставить значение верхней границы и вычесть значение нижней. (напомним, что по таблице значений углов тригонометрических функций $cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$):

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} sin\,x\,dx = -cos\,x\,|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -cos\frac{2\pi}{3}-\left(-cos\frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Пример №2: Вычислить интегралы: а) $\int_0^1 x\,dx$ б) $\int_{-1}^{2} 3x^2\,dx$ в) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ г) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

а) $\int_0^1 x\,dx = \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)|_0^1 = \left(\frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = \frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}$ (здесь использовалась формула: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$).

б) $\int_{-1}^{2} 3x^2\,dx = 3\cdot\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)|_{-1}^{2} = 3\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)|_{-1}^{2} = (x^3)|_{-1}^{2} = 2^3-(-1)^3 =$

$=8+1=9$ (здесь использовалась формула: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, напомним, что число можно выносить за знак интеграла).

в) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_2^3 x^{-2}\,dx = \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)|_2^3 = \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)|_2^3 = \left(-\frac{1}{x}\right)|_2^3 = -\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} == \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$ (здесь использовалась формула: $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, напомним одно из свойств степеней $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, т.е. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$).

г)$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)|_1^4 = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)|_1^4 = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)|_1^4 = \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3} =$

$= \frac{2\sqrt{64}}{3} - \frac{2\sqrt{1}}{3} = \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ (здесь использовалась формула: $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, напомним, что корень всегда можно представить в виде степени с рациональным показателем, т.е. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

Тема 3.3. Применение определенного интеграла к решению прикладных задач.

Цель: Познакомиться с понятием двойного и тройного интеграла. Научиться находить двойные и тройные интегралы.

Определение двойного интеграла. Рассмотрим функцию двух переменных

$z = f(x, y)$.

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ обозначается как $\iint_R f(x, y) dA$, где R - область интегрирования в плоскости Oxy.

Определение 1. Говорят, что область R на плоскости относится к типу 1 или является элементарной относительно оси Oy, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от x , и описывается множеством:

$$R = \{(x, y),\ a \le x \le b,\ p(x) \le y \le q(x)\}$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x, y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде: $\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx$ (рисунок 1).

Определение 2. Говорят, что область R на плоскости относится к типу 2 или является элементарной относительно оси Ox, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от y , и описывается множеством:

$$R = \{(x, y), \quad u(y) \leq x \leq v(y), \quad c \leq y \leq d\}.$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x, y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде: $\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$ (рисунок 2).

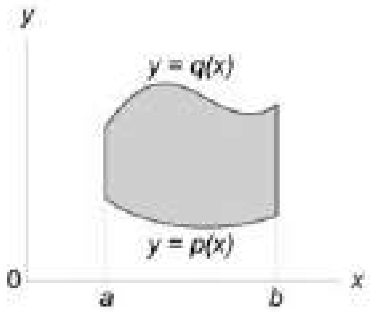


рисунок 1

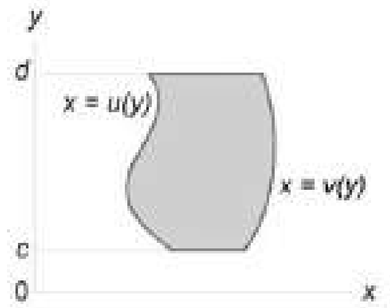


рисунок 2

Пример №1: Вычислить интегралы: а) $\int_0^1 \int_1^2 xy\, dydx$ б) $\int_0^1 \int_y^{y^2} (x + 2y)\, dxdy$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x + y)\, dxdy.$

а) $\int_0^1 \int_1^2 xy\, dydx$

Вычисление данного двойного интеграла сводится к нахождению двух определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной y (x считается константой, здесь воспользуемся формулой: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$):

$$\int_1^2 xy\, dy = x\left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right)|_1^2 = x\left(\frac{y^2}{2}\right)|_1^2 = x\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = x\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x.$$

Найдем внешний интеграл по переменной x, подставив в него найденное выражение: $\int_0^1 \frac{3}{2}x\, dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

б) $\int_0^1 \int_y^{y^2} (x + 2y)\, dxdy$

Вычисление данного двойного интеграла сводится к нахождению двух определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной x (y

считается константой, здесь воспользуемся формулами: $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и $\int 1 \ dx = x + C$):

$$\int_y^{y^2} (x+2y)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)|_y^{y^2} = \frac{(y^2)^2}{2} + 2yy^2 - \frac{y^2}{2} - 2yy =$$

$$= \frac{y^4}{2} + 2y^3 - \frac{y^2}{2} - 2y^2 == \frac{y^4}{2} + 2y^3 + \frac{-y^2-4y^2}{2} = \frac{y^4}{2} + 2y^3 - \frac{5y^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}y^4 + 2y^3 - \frac{5}{2}y^2.$$

Найдем внешний интеграл по переменной y, подставив в него найденное выражение: $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^4 + 2y^3 - \frac{5}{2}y^2\right) \ dy = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{y^5}{5} + 2 \cdot \frac{y^4}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{y^3}{3}\right)|_0^1 =$

$$= \left(\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{2} - \frac{5y^3}{6}\right)|_0^1 = \frac{1^5}{10} + \frac{1^4}{2} - \frac{5\cdot 1^3}{6} - \frac{0^5}{10} - \frac{0^4}{2} + \frac{5\cdot 0^3}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{3+15-25}{30} = -\frac{7}{30}$$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y) \ dxdy$

Вычисление данного двойного интеграла сводится к нахождению двух определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной x (y считается константой, здесь воспользуемся формулами: $\int \cos(kx+b) \ dx = \frac{1}{k} sin(kx+b) + C, \int \cos x \ dx = sin\, x + \text{C}$,

$\int \sin x \ dx = -\cos x + \text{C}$):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y) \ dx = \left(\frac{1}{1} sin(x+y)\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(sin(x+y)\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - sin(0+y) = \cos y - \sin y$ (напомним, что по формуле привидения $sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$)

Найдем внешний интеграл по переменной y, подставив в него найденное выражение: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y - \sin y) \ dy = \left(\sin y - (-\cos y)\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\sin y + \cos y)|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \cos 0 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ (напомним, что по таблице значений углов тригонометрических функций $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = 1$).

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Рассмотрим случай, когда область интегрирования U является элементарной относительно оси Oz, т.е. любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области U не более, чем в двух точках.

Пусть область U ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$, (рисунок 1). Проекцией тела U на плоскость Oxy является область D (рисунок 2). Будем предполагать, что функции $z_1(x, y)$, и $z_2(x, y)$ непрерывны в области D.

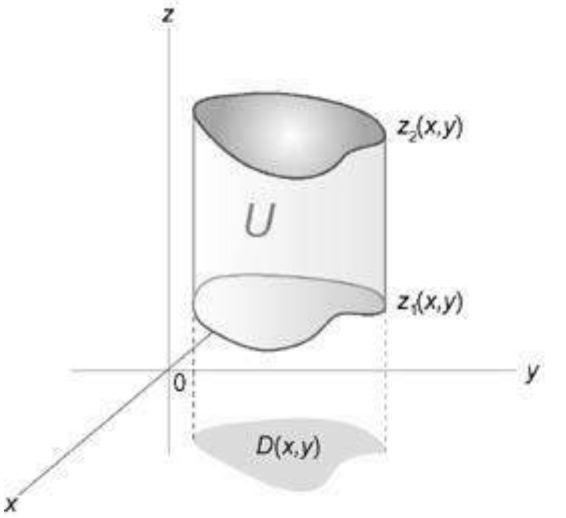


рисунок 1

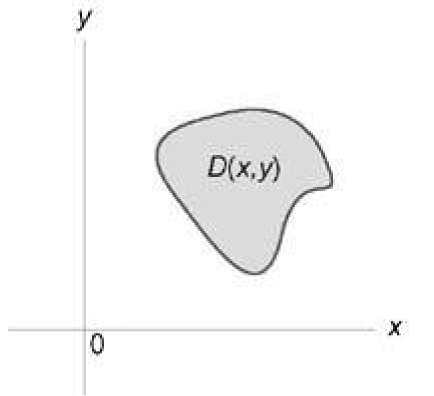


рисунок 2

Тогда для любой непрерывной в области U функции $f(x, y, z)$ можно записать соотношение: $\iiint_U f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$.

Пример №2: Вычислить интегралы: а) $\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyz\ dxdydz$

б) $\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} (1-x)\ dzdydx$ в) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^3\ dzdydx$.

а) $\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyz\ dxdydz$

Вычисление данного тройного интеграла сводится к нахождению трех определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной x (y, z считается константой, здесь воспользуемся формулой: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$):

$\int_0^y xyz\ dx = yz\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y = yz\left(\frac{y^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = yz \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}y^3z.$

Найдем следующий интеграл по переменной y (z считается константой), подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^z \left(\frac{1}{2}y^3 z\right) dy = \left(\frac{1}{2}z \cdot \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^z = \left(\frac{y^4 z}{8}\right)\Big|_0^z = \frac{z^4 z}{8} - \frac{0^4 z}{8} = \frac{z^5}{8} = \frac{1}{8}z^5$$

Найдем внешний интеграл по переменной z, подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{8}z^5\right)\ dz = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{z^6}{6}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{z^6}{48}\right)\Big|_0^2 = \frac{2^6}{48} - \frac{0^6}{48} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3} = 1\,\frac{1}{3}.$$

б) $\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} (1-x)\ dzdydx$

Вычисление данного тройного интеграла сводится к нахождению трех определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной z (x, y считается константой, здесь воспользуемся формулами: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и $\int 1\ dx = x + C$):

$$\int_0^{6-3x-2y} (1-x)\ dz = (1 \cdot z - x \cdot z)\Big|_0^{6-3x-2y} = (z - xz)\Big|_0^{6-3x-2y} =$$

$$= 6 - 3x - 2y - x(6 - 3x - 2y) - 0 + x \cdot 0 = 6 - 3x - 2y - 6x + 3x^2 + 2xy =$$

$$= 6 - 9x - 2y + 3x^2 + 2xy.$$

Найдем следующий интеграл по переменной y (x считается константой), подставив в него найденное выражение: $\int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6 - 9x - 2y + 3x^2 + 2xy)\ dy =$

$$= \left(6y - 9xy - 2\frac{y^2}{2} + 3x^2 y + 2x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} =$$

$$= (6y - 9xy - y^2 + 3x^2 y + xy^2)\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} =$$

$$= 6\left(3 - \frac{3}{2}x\right) - 9x\left(3 - \frac{3}{2}x\right) - \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 + 3x^2\left(3 - \frac{3}{2}x\right) + x\left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 =$$

$= 6 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{3}{2}x - 9x \cdot 3 + 9x \cdot \frac{3}{2}x - \left(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}x + + \left(\frac{3}{2}x\right)^2\right) + 3x^2 \cdot 3 - 3x^2 \cdot \frac{3}{2}x + x\left(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}x\right)^2\right) = 18 - 9x - 27x + + \frac{27}{2}x^2 - \left(9 - 9x + \frac{9}{4}x^2\right) + 9x^2 - \frac{9}{2}x^3 + x\left(9 - 9x + \frac{9}{4}x^2\right) = 18 - 9x - 27x + + \frac{27}{2}x^2 - 9 + 9x -$

$\frac{9}{4}x^2+9x^2-\frac{9}{2}x^3+9x-9x^2+\frac{9}{4}x^3=18-27x+\frac{27}{2}x^2-9++9x-\frac{9}{4}x^2-$
$\frac{9}{2}x^3+\frac{9}{4}x^3=9-18x+\frac{54-9}{4}x^2+\frac{-18+9}{4}x^3=9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3.$

Найдем внешний интеграл по переменной x, подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^2\left(9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3\right)\,dx=\left(9x-18\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{45}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right)|_0^2=$$
$$\left(9x-9x^2++\frac{15x^3}{4}-\frac{9x^4}{16}\right)|_0^2=9\cdot2-9\cdot2^2+\frac{15\cdot2^3}{4}-\frac{9\cdot2^4}{16}-9\cdot0+9\cdot0^2-$$
$$-\frac{15\cdot0^3}{4}+\frac{9\cdot0^4}{16}=18-9\cdot4+\frac{15\cdot8}{4}-\frac{9\cdot16}{16}=18-36+30-9=3$$

в) $\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}xy^2z^3\ \,dzdydx$

Вычисление данного тройного интеграла сводится к нахождению трех определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной z $(x,y$ считается константой, здесь воспользуемся формулой: $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C)$:

$$\int_0^{xy}xy^2z^3\ \,dz=xy^2\left(\frac{z^4}{4}\right)|_0^{xy}=xy^2\left(\frac{(xy)^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)=xy^2\left(\frac{x^4y^4}{4}\right)=\frac{x^5y^6}{4}=$$
$$=\frac{1}{4}x^5y^6$$

Найдем следующий интеграл по переменной y (x считается константой), подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^x\left(\frac{1}{4}x^5y^6\right)\,dy=\frac{1}{4}x^5\left(\frac{y^7}{7}\right)|_0^x=\frac{1}{4}x^5\left(\frac{x^7}{7}-\frac{0^7}{7}\right)=\frac{1}{4}x^5\left(\frac{x^7}{7}\right)=\frac{x^{12}}{28}=\frac{1}{28}x^{12}.$$

Найдем внешний интеграл по переменной x, подставив в него найденное выражение: $\int_0^1\left(\frac{1}{28}x^{12}\right)\,dx=\frac{1}{28}\left(\frac{x^{13}}{13}\right)|_0^1=\frac{1}{28}\left(\frac{1^{13}}{13}-\frac{0^{13}}{13}\right)=\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{364}.$

Тема 4.1. Числовые ряды. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Свойства рядов.

Цель: Научиться находить члены ряда по формуле общего члена и наоборот, сумму ряда или устанавливать его расходимость.

В общем виде положительный числовой ряд можно записать: $\sum-$ знак суммы; a_n – общий член ряда. Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n = 1$, затем $n = 2$, потом $n = 3$, и так далее – до бесконечности.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$, либо с любого натурального числа.

Будем считать, что все слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это неотрицательные числа. То есть, речь пойдет о положительных числовых рядах.

Пример №1: Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2n + 1$.

Сначала подставим $n = 1$, тогда: $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Затем $n = 2$, тогда: $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Потом $n = 3$, тогда: $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Запишем сумму первых трех членов ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} 2n + 1 = 3 + 5 + 7 + \ldots$

Пример: Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots$ В заданиях данного вида важно определить закономерность, чтобы задать формулой общий член ряда. В числителе стоят все натуральные числа по порядку $1,2,3,4, \ldots, n$, т.е. n. В знаменателе 3, 9, 27, 81 – это степени числа 3, т.е. 3^n. Получим, $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Сумма ряда. Понятие сходимости числовых положительных рядов.

Строгое определение сходимости/расходимости и суммы ряда в теории даётся через так называемые частичные суммы ряда. Частичные – значит неполные. Распишем частичные суммы числового ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n + \ldots$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

…

И особую роль играет частичная сумма «эн» членов ряда:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = \infty$ либо суммы вообще не существует. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ не существует.

$\sum_{n=1}^{\infty} 2n + 1 = 3 + 5 + 7 + \ldots = \infty$ ряд расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$ ряд расходится.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу S: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = S$. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ – этот ряд сходится и его сумма равна нулю.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots$ – этот ряд представляет бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. n-ый член: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Сумма членов убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

$b_1 = 1$, $q = \frac{\frac{1}{4^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$. Таким образом:

$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ сходится.

Свойства рядов:

1) Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \bar{S}$, то будут сходиться и ряды, составленные из сумм или разностей соответствующих членов:

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + \bar{S}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - \bar{S}$.

2) Константу k можно вынести за знак ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример: Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{6^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n} + \ldots$$

Дважды используем формулу для нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

Для ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$. Таким образом: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$

Для ряда $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n} + \ldots$, $b_1 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{\frac{2^2}{3^2}}{\frac{2}{3}} = \frac{2^2 \cdot 3}{3^2 \cdot 2} = \frac{2}{3}$. Таким образом: $S = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2.$

Вернемся к решению нашего примера и подставим получившиеся результаты:

$$S = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n} + \ldots = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Общий алгоритм нахождения суммы ряда:

1) необходимо составить n - ую частичную сумму ряда S_n.

2) найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Пример №2: Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Сначала нужно разложить общий член ряда в сумму дробей. Используем метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

домножаем на наименьший общий знаменатель $(2n+1)(2n+3)$ дроби,

$\frac{A(2n+1)(2n+3)}{2n+1} + \frac{B(2n+1)(2n+3)}{2n+3} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}$ сокращаем,

$A(2n+3) + B(2n+1) = 1$ раскрываем скобки,

$2An + 3A + 2Bn + B = 1$ выписываем по отдельности системы уравнений содержащие n и состоящие только из свободных членов (если бы в уравнении имелись бы n^2, n^3, n^4 и т.д., то мы бы их тоже выписали отдельно),

$\begin{cases} 2An + 2Bn = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases}$ разделим первое уравнение на общий множитель $2n$, а из второго выразим B,

$\begin{cases} A + B = 0 \\ B = 1 - 3A \end{cases}$ подставим B в первое уравнение,

$\begin{cases} A + 1 - 3A = 0 \\ B = 1 - 3A \end{cases}$ решим отдельно первое уравнение относительно A,

$1 - 2A = 0$

$-2A = -1$

$A = \frac{1}{2}$, подставим получившийся ответ во второе уравнение и найдем B,

$B = 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Теперь подставив значения A и B в выражение $\frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}$, мы сможем записать общий член ряда:

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Теперь составим частичную сумму ряда $S_n = a_1 + \ a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot1+1} - \frac{1}{2\cdot1+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot2+1} - \frac{1}{2\cdot2+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3+1} - \frac{1}{2\cdot3+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)$$

…

$$a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)+1} - \frac{1}{2(n-1)+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-2+1} - \frac{1}{2n-2+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Почти все слагаемые частичной суммы сокращаются:

$S_n = a_1 + \ a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots \frac{1}{2n-1} -$
$- \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\Big)$

Осталось вычислить элементарный предел и узнать сумму ряда: $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot\infty+3}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{\infty}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - 0\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Тема 4.2. Признаки сходимости рядов.

Цель: Научиться определять сходимость или расходимость числовых положительных рядов с помощью признаков сходимости сравнения и Даламбера.

Сначала начнем с повторения. Вспомним случаи, когда нужно применять предельный признак сравнения.

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

1) В знаменателе находится многочлен.

2) Многочлены находятся и в числителе, и в знаменателе.

3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

Основные предпосылки для применения признака Даламбера следующие:

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например, 2^n, 3^n, 5^n и так далее.

2) В общий член ряда входит факториал, например, $n!$, $8!$, $(n+1)!$, $(n-3)!$ и так далее.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)$.

Признак Даламбера: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

а) При $D < 1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$.

б) При $D > 1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.

в) При $D = 1$ признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак.

! Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать предельный признак сравнения.

Пример №1: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$. Используем признак Даламбера, т.к. в общий член ряда входит число в степени:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\cdot(n^2+2n+1+n+1-1)}{4^1\cdot 4^n\cdot(n^2+n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+1)}{4\cdot(n^2+n-1)}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1+0+0}{1+0-0}=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Пример №2: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$. Используем признак Даламбера, т.к. в общий член ряда входит факториал:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}}{\frac{(n+1)!,}{(n+5)\cdot 7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1+1)!\cdot(n+5)\cdot 7^n}{(n+1)!\cdot(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot(n+5)\cdot 7^n}{(n+1)!\cdot(n+6)\cdot 7\cdot 7^n}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot(n+5)}{(n+1)!\cdot(n+6)}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+5)}{(n+1)!\cdot(n+6)}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+2n+10}{n+6}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+10}{n+6}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{7n}{n^2}+\frac{10}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{6}{n^2}}=$$

$$\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{7}{n}+\frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1+\frac{7}{\infty}+\frac{10}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1+0+0}{0+0}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{0}=\frac{1}{7}\cdot\infty=\infty>1$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится.

Пример №3: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}$. Используем признак Даламбера, т.к. в общем члене ряда есть «цепочка множителей». Сначала для понимания происходящего распишем ряд подробно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{1\cdot3}+\frac{2^3}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2^4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}+\ldots$$

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2(n+1)-1)}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+2-1)}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Вот здесь часто допускают ошибку, формально по алгоритму записывая, что $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2(n+1)-1)}$, пропуская при этом предыдущий множитель факториала $2n-1$!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)}}{\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=2\cdot\frac{1}{2\cdot\infty+1}=2\cdot\frac{1}{\infty}=2\cdot0=0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Тема 4.3. Степенные ряды.

Цель: Научиться определять сходимость или расходимость числовых положительных рядов с помощью радикального и интегрального признака сходимости Коши.

Радикальный признак Коши.

Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда полностью находится в степени, зависящей от n. Либо когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена ряда.

Радикальный признак Коши: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=D$, то:

а) При $D<1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D=0$.

б) При $D>1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D=\infty$.

в) При $D = 1$ признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак.

Пример №1: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$.

Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от n, а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{(n+1)^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2}{n}+\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{n+2+\frac{1}{n}} = \left(\frac{5\cdot\infty-1}{6\cdot\infty+7}\right)^{\infty+2+\frac{1}{\infty}} = \left(\frac{\infty-1}{\infty+7}\right)^{\infty+2+0} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{6n}{n}+\frac{7}{n}}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{n}}{6+\frac{7}{n}}\right)^{n+2} = \left(\frac{5-\frac{1}{\infty}}{6+\frac{7}{\infty}}\right)^{\infty+2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\infty} = 0 < 1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Интегральный признак Коши. Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Данный ряд сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом. Если получено конечное число, значит, исследуемый ряд сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример №2: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$.

Используем интегральный признак Коши. Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $[1;\infty)$. Найдем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}dn = \int_1^{\infty}(5n-1)^{-\frac{2}{3}}dx = \left(\frac{(5n-1)^{-\frac{2}{3}+1}}{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}\cdot\frac{1}{5}\right)\Big|_1^{\infty} = \left(\frac{(5n-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}\cdot 5}\right)\Big|_1^{\infty} =$$

$$= \left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{5n-1}}{5}\right)\Big|_1^{\infty} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{5\cdot\infty-1}}{5} - \frac{3\cdot\sqrt[3]{5\cdot 1-1}}{5} = \frac{3\cdot\infty}{5} - \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5} = \infty - \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5} = \infty$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Примечание: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$ также можно исследовать с помощью предельного признака сравнения. Для этого сравнить исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Тема 5.1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Цель: Познакомиться с определениями и понятиями дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными. Научиться решать дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными и разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения $f(y)\,dy = g(x)\,dx$ называют уравнениями с разделенными переменными. Название этого вида дифференциальных уравнений достаточно показательно: выражения, содержащие переменные x и y, разделены знаком равенства, то есть, находятся по разные стороны от него.

Общим интегралом уравнения с разделенными переменными является равенство $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$. Если интегралы из этого равенства выражаются в элементарных функциях, то мы можем получить общее решение дифференциального уравнения как неявно заданную функцию $\Phi(x, y) = 0$, а иногда получается выразить функцию y в явном виде.

В дифференциальных уравнениях $f_1(y) \cdot g_1(x)\,dy = f_2(y) \cdot g_2(x)\,dx$ или $f_1(y) \cdot g_1(x) \cdot y^{/} = f_2(y) \cdot g_2(x)$ переменные могут быть разделены, проведением преобразований. Такие ДУ называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Соответствующее ДУ с разделенными переменными запишется как $\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\,dy = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}\,dx$.

Прежде чем продолжить, напомним, что $y^{/} = \frac{dy}{dx}$ когда y является функцией аргумента x.

Пример №1: Решить уравнение:

а) $3x^2\ dx - \frac{2y}{1+y^2}\ dy = 0$ б) $cos\, x\ \ dx - tg\ y\ dy = 0.$

а) $3x^2\ dx - \frac{2y}{1+y^2}\ dy = 0$

С помощью формулы $\int f(y)\ dy = \int g(x)\ dx$ приводим уравнение к виду:

$3x^2\ dx = \frac{2y}{1+y^2}\ dy, \int 3x^2\ dx = \int \frac{2y}{1+y^2}\ dy$ и находим его общее решение по формулам $\int x^{\alpha}\ dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{1}{2} ln|x^2 \pm a^2| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$3 \cdot \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} ln|1 \pm y^2|\right) + C$

$3 \cdot \frac{x^3}{3} = ln|1 \pm y^2| + C$

$x^3 = ln|1 \pm y^2| + C$

$C = x^3 - ln|1 \pm y^2|$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

б) $cos\, x\ \ dx - tg\ y\ dy = 0.$

С помощью формулы $\int f(y)\ dy = \int g(x)\ dx$ приводим уравнение к виду:

$cos\, x\ \ dx = tg\ y\ dy, \int cos\, x\ \ dx = \int tg\ y\ dy$ и находим его общее решение по формулам $\int \cos x\ \ dx = sin\, x + C$, $\int tg\ x\ \ dx = -ln|cosx| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$sin\, x = -ln|cosy| + C$

$C = sin\, x + ln|cosx|$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример №2: Решить уравнение: а) $2x(1 - y^2)\ dx - 2y(1 - x^2)\ dy = 0$

б) $y^{/} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

а) $2x(1 - y^2)\ dx - 2y(1 - x^2)\ dy = 0$

Для начала преобразуем выражение:

$2x(1 - y^2)\ dx = 2y(1 - x^2)\ dy$

$\frac{2x}{(1-x^2)}\ dx = \frac{2y}{(1-y^2)}\ dy$

$-\frac{2x}{(x^2-1)}\ dx = -\frac{2y}{(y^2-1)}\ dy$

С помощью формулы $\int f(y)\ dy = \int g(x)\ dx$ приводим уравнение к виду:

$\int -\frac{2x}{(x^2-1)}\ dx = \int -\frac{2y}{(y^2-1)}\ dy$ и находим его общее решение по формуле

$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{1}{2} ln|x^2 \pm a^2| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$-2 \cdot \left(\frac{1}{2} ln|x^2-1|\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2} ln|y^2-1|\right) + C$

$-ln|x^2-1| = -ln|y^2-1| + C$

$C = -ln|x^2-1| + ln|1 \pm y^2|$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

б) $y^{/} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

Для начала преобразуем выражение (напомним, что $y^{/} = \frac{dy}{dx}$):

$\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

С помощью формулы $\int f(y)\ dy = \int g(x)\ dx$ приводим уравнение к виду:

$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ и находим его общее решение по формуле

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsinx\ +\ C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$arcsiny = -arcsinx + C$

$C = arcsiny + arcsinx$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Тема 5.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Цель: Познакомиться с определениями и понятиями дифференциальных уравнений, простейших дифференциальные

уравнения 1 порядка. Научиться решать дифференциальные уравнения 1 порядка.

Определения и понятия теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае содержит:

1) независимую переменную x

2) зависимую переменную y

3) первую производную функции: $y^{/}$.

Общее решение дифференциального уравнения – это множество решений, содержащее все без исключения решения этого дифференциального уравнения.

Если решение дифференциального уравнения удовлетворяет изначально заданным дополнительным условиям, то его называют частным решением дифференциального уравнения.

Задача Коши – это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$y_0 = \varphi(x_0)$, где x_0- заданная точка на интервале $(a; b)$, y_0 - заданное значение искомой функции.

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.

Общее решение дифференциальных уравнений вида $y^{/} = f(x)$ задается формулой $y = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная. Решение получается на каждом интервале непрерывности функции $f(x)$ со своей произвольной постоянной.

Пример №1: Убедитесь, что функция $y = x^2 + 1$ является решением дифференциального уравнения $y^/ = (x+1)^2 - y$ на любом интервале $(a; b)$.

Найдем производную функции с помощью формул: $(x^\alpha)^/ = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $(C)^/ = 0$ из таблицы «Производных основных элементарных функций»:

$y^/ = (x^2 + 1\ )^/ = 2x$. Подставим производную и функцию $y = x^2 + 1$ в дифференциальное уравнение $y^/ = (x+1)^2 - y$, получим:

$2x = (x+1)^2 - (x^2 + 1\ )$

$2x = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1$

$2x = 2x$, т.к. получилось тождество, справедливое для любых x на интервале $(a; b)$, то функция $y = x^2 + 1$ является решением дифференциального уравнения $y^/ = (x+1)^2$.

Пример №2: Убедитесь, что функция $y = \sin x + C$ является общим решением дифференциального уравнения $y^/ - \cos x = 0$.

Найдем производную функции с помощью формул: $(\sin x)^/ = \cos x$, $(C)^/ = 0$ из таблицы «Производных основных элементарных функций»:

$y^/ = (\sin x + C\ \ )^/ = \cos x$. Подставим производную и функцию

$y = \sin x + C$ в дифференциальное уравнение $y^/ - \cos x = 0$, получим:

$\cos x - \cos x = 0$.

$0 = 0$, т.к. получилось тождество, справедливое для любых x, то функция

$y = \sin x + C$ является решением дифференциального уравнения

$y^/ - \cos x = 0$.

Пример №3: Найти общее решение дифференциального уравнения

$y^/ = \frac{1}{x}$.

Функция $\frac{1}{x}$ имеет два интервала непрерывности: $(-\infty; 0)$ и $(0;\ \infty)$. Для того чтобы найти общее решение дифференциального уравнения найдем первообразную функции по формуле: $\int \frac{1}{x}\, dx = ln\, x + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$y = ln|x| + C,\ \ x \neq 0$.

Тема 5.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Цель: Познакомиться с определениями и понятиями уравнений высших порядков, линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Научиться решать дифференциальные уравнения высших порядков, линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения $y^{/} = f(y)$ приводится к виду $x^{/} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ и находится общее решение $x = \varphi(y, C)$. Общий интеграл исходного уравнения получится после присоединения к множеству решений вида $y = y_k$, где $f(y_k) = 0$,

$k = 1,2 \dots m$.

Пример №1: Решить уравнение: а) $y^{/} = e^{y}$ б) $y^{/} = y^2 - 1$.

а) $y^{/} = e^{y}$

С помощью формулы $x^{/} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ приводим уравнение к виду:

$x^{/} = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{e^{y}} = e^{-y}$ и находим его общее решение по формуле: $\int e^{kx+b}\ dx = \frac{1}{k} e^{kx+b} + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$x = \int e^{-y}\, dy = \frac{1}{-1} e^{-y} + C = -e^{-y} + C$. $e^{y} = 0$ не имеет корней, значит общим решением данного дифференциального уравнения будет только

$x = -e^{-y} + C$.

б) $y^{/} = y^2 - 1$

С помощью формулы $x^{/} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ приводим уравнение к виду:

$x^{/} = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{y^2-1}$ и находим его общее решение по формуле: $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$x = \int \frac{1}{y^2-1} dy = \frac{1}{2\cdot 1} ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$. $y^2 - 1 = 0$, $y^2 = 1$,

$y = \pm 1$. Общим решением данного дифференциального уравнения будет $x = \frac{1}{2} ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$ и $y = \pm 1$.

Тема 7.1. Упорядоченные множества. Перестановки, сочетания, размещения и их свойства.

Цель: Познакомиться с понятиями множеств, формулами перестановок, размещений и сочетаний. Научиться решать комбинаторные задачи с помощью перестановок, сочетаний и размещений, упрощать выражения, решать уравнения, используя перестановки, сочетания и размещения.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком.

Если элемент a принадлежит множеству A, то записывают $a \in A$ ($\in$ — принадлежит), если нет, то $a \notin A$.

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится). Элементы множества B, не входящие в A, образуют множество, которое называют дополнением A и обозначается $\overline{A}$

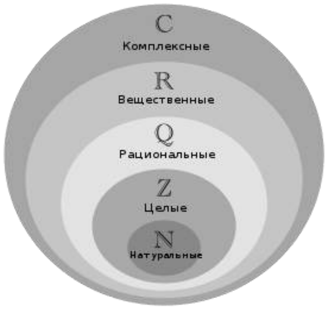
Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым множеством и записывается $\emptyset$.

Если множество состоит из конечного числа элементов, то его называют конечным, если нет, то бесконечным.

Основные числовые множества:

Обозначение	Название	Как задается множество:
N	Натуральных чисел.	$N = \{1,2,3, \dots, n\}$
Z	Целых чисел.	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n\}$
Q	Рациональных чисел (обыкновенные, десятичные и бесконечные десятичные периодические дроби).	$Q = \frac{p}{q}$, где p — целое число, q — натуральное. Например, $\frac{3}{19}$, $0{,}25$, $1{,}6(3)$.
I	Иррациональных чисел (бесконечные десятичные непериодические дроби).Q и I не пересекаются– то есть ни одно иррациональное число невозможно представить в виде $\frac{p}{q}$рациональной дроби.	Например, π, e,$0{,}13856 \dots$
R	Действительных (вещественных) чисел.	$R = Q + I$
C	Комплексных чисел. (выражение вида $z = a + b \cdot i$, где a, b — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица.	Например,$z = -2 + 6 \cdot i$

С помощью кругов Эйлера все множества можно изобразить в виде:



Перестановки.

Пусть имеется n различных объектов. Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются перестановками, а их число равно: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.Символ $n!$ называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1до n. По определению, считают, что $0! = 1$, $1! = 1$.

Сочетания.

Пусть имеется nразличных объектов. Будем выбирать из них mобъектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются сочетаниями из n объектов по m, а их число равно: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

Размещения.

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать из них mобъектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются размещениями из n объектов по m, а их число равно:$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Пример №1: Возьмем 3 фрукта: яблоко, грушу и банан.

а) Сколькими способами их можно переставить?

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

б) Сколькими способами можно выбрать два фрукта?

$C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3$

Пример №2: Проверьте равенство $C_{14}^{9} + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$.

Чтобы найти значения C_{14}^{9},C_{14}^{10}, C_{15}^{10} воспользуемся формулой

$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$, получим:

$$C_{14}^{9} = \frac{14!}{(14-9)!\cdot 9!} = \frac{14!}{5!\cdot 9!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 9!} = 11\cdot 13\cdot 14 = 2002$$

$$C_{14}^{10} = \frac{14!}{(14-10)!\cdot 10!} = \frac{14!}{4!\cdot 10!} = \frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 10!} = 11\cdot 13\cdot 7 = 1001$$

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)!\cdot 10!} = \frac{15!}{5!\cdot 10!} = \frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 10!} = 11\cdot 13\cdot 7\cdot 3 = 3003$$

Подставим получившиеся результаты и проверим выполнение равенства:

$$C_{14}^{9} + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$$

$$2002 + 1001 = 3003$$

Условие равенства выполнены.

Ответ: равенство верное.

Пример №3: Возьмем 3 фрукта: яблоко, грушу и банан. Сколькими способами можно раздать по одному фрукту Даше и Наташе?

Для того чтобы раздать два фрукта, сначала нужно их выбрать. Согласно Примеру №1 б) предыдущей темы, сделать это можно $C_3^2 = 3$ способами.

Но комбинаций сейчас будет в два раза больше. Рассмотрим, например, первую пару фруктов: яблоком можно угостить Дашу, а грушей – Наташу; либо наоборот – груша достанется Даше, а яблоко – Наташе.

И такая перестановка возможна для каждой пары фруктов. Она отличается от формулы C_3^2 тем, что учитывает не только количество способов, которым можно выбрать несколько объектов, но и все перестановки объектов в каждой возможной выборке. Так, в рассмотренном примере, важно не только то, что можно просто выбрать, например, грушу и банан, но и то, как они будут распределены (размещены) между Дашей и Наташей.

Тогда количество комбинаций равно: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$.

Тема 7.2. События и их классификация. Классическое и статистическое определения вероятности случайного события.

Цель: Познакомиться с определениями события, комбинации событий, противоположных и независимых событий, понятиями теории вероятностей. Изучить классическое определение вероятности, свойств вероятности, теоремы о сумме вероятностей и произведения вероятностей. Научиться определять являются ли события независимыми, находить комбинации событий.

Все, что происходит в реальной действительности, называют явлениями или событиями.

Событие называется случайным, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти. Случайным будет, например, событие «При подбрасывании игрального кубика выпадет 6 очков».

До эксперимента, как правило, невозможно точно сказать, произойдет данное событие, или не произойдет – это выясняется лишь после его завершения.

Случайное событие может быть: невозможным, т.е. никогда не произойти или достоверным, т.е. произойти при каждом эксперименте.

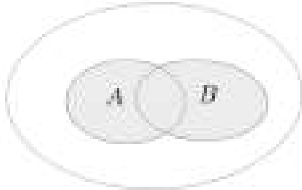
События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются равновозможными, если у каждого из событий равные шансы на появление в эксперименте (В урне два шара – белый и черный, появление черного шара не исключает появление белого при том же испытании).

События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

Случайные события (большими буквами латинского алфавита): $A, B, C, D, \dots$ (или $A_1, A_2, A_3, \dots A_m$). «Случайные» опускают и говорят просто «события». Число исходов, благоприятствующих наступлению данного события – m, число всех исходов (опытов) – n.

Суммой (объединением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и Bобозначают $A + B$ (или $A \cup B$). На рисунке с помощью кругов Эйлера



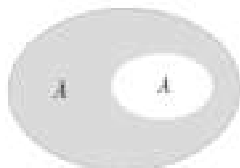
проиллюстрировано понятие суммы событий A и B : большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — $A + B$ событие.

Произведением (пересечением) событий A и Bназывается событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают $A \cdot B$ (или $A \cap B$).Рисунок иллюстрирует с помощью кругов

Эйлера произведение событий A и B: темнее закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие $A \cdot B$.

События A и B называют равными (равносильными) и обозначают $A = B$, если событие Aпроисходит тогда и только тогда, когда происходит событие B. Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, событие B— выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Событие $\bar{A}$ называют противоположным событию A, если событие $\bar{A}$происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. На рисунке проиллюстрирована



взаимосвязь событий A и $\bar{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\bar{A}$ изображено закрашенной областью).

Пример №1: Событие «На игральном кубике выпадет 7 очков» - невозможное, а «На игральном кубике выпадет меньше семи очков» -

достоверное. Разумеется, если речь идет о кубике, на гранях которого написаны числа от 1 до 6.

Два события называются зависимыми, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого, в случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие Bпроизошло. Аналогично через $P(B/A)$ обозначается условная вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$ или $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Следствие. Вероятность совместного наступления двух независимых событий A и Bравна произведению вероятностей этих событий:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример №1: Выяснить, являются ли события А и В независимыми, если:

$P(A) = \frac{5}{13}, P(B) = \frac{8}{13}, P(AB) = \frac{39}{169}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{40}{169};\ P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ – не являются.

Классическое определение вероятности. Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$ – вероятность случайного события.

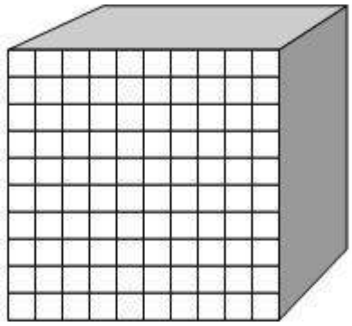
Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$. Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному – вероятность $P(A) = 1$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$, где $A\cdot B$ – произведение событий A и B.

Пример №2: Деревянный кубик с окрашенными гранями и надписью «бюджет» (по одной букве на грани) распиливается на 1000 равных кубиков, из которых наугад выбирается один. Какова вероятность того, что он будет иметь две окрашенные грани?



Маленькие кубики с двумя окрашенными гранями находились до распила при ребрах куба (но не угловые). Количество маленьких кубиков $n=1000$, тогда длина ребра исходного куба в $\sqrt[3]{1000}=10$ раз больше длины ребра маленького кубика.

Отсюда, маленьких не угловых кубиков с двумя окрашенными гранями $10-2=8$. Так как всего у куба 12 ребер, всего количество благоприятных исходов (кубиков с двумя окрашенными гранями) $m=12\cdot 8=96$, а всего исходов $n=1000$. Вероятность случайного события по классическому определению вероятности: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{96}{1000}=0{,}096$.

Тема 7.3. Предмет и задачи математической статистики. Способы отбора статистического материала. Статистическое распределение. Статистические оценки параметров распределения.

Цель: Ознакомиться с представлением числовых данных и их характеристиками, решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик.

Если в N независимых опытах событие A осуществляется M раз, то M называется абсолютной частотой события A, а соотношение $\frac{M}{N}$ называется относительной частотой события A.

$$\text{Относительная частота события} = \frac{\text{количество осуществления события}}{\text{количество экспериментов}}$$

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению $W(A) = \frac{M}{N}$.

Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654 — 1705) обосновал так называемый закон больших чисел:

Пример №1: Проведём эксперимент:

1) бросить игровой кубик 200 раз и каждый раз записывать количество выпавших пунктов;

2) сосчитать, в скольких случаях выпало 4 пункта. Допустим, что после подсчётов результат 4 был 32 раза. Что можно вычислить?

В наших экспериментах событие A — выпали 4 пункта. Значит, по определению:

1) абсолютная частота события A равна 32;

2) относительная частота события $A = \frac{32}{200} = \frac{4}{25}$.

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний. В нашем эксперименте относительная частота события $A = \frac{4}{25}$ или статистическая вероятность $P(A) \approx \frac{4}{25}$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. Учебник для студ. сред. проф. учреждений – М.: Издательский центр «Академия», 2020 г.

Дополнительная:

2. Методические указания по проведению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Математика, 2021 г.

3. Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы обучающихся по учебной дисциплине ЕН.01 Математика, 2021 г.

4. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения по учебной дисциплине ЕН.01 Математика, 2021 г.

5. Фонд оценочных средств по учебной дисциплине ЕН.01 Математика, 2021 г.

Рекомендуемые интернет - ресурсы:

6. http://mathprofi.ru/ - вся математика в одном месте. Это математический портал, на котором вы найдете любой материал по математическим дисциплинам.