ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

«Владивостокский морской рыбопромышленный колледж»

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения

высшего образования

«Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный

университет»

(«ВМРК» ФГБОУ ВО «Дальрыбвтуз»)

ЕН. 03. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для специальности

09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Владивосток

2020

ОДОБРЕНЫ

Цикловой комиссией

естественнонаучных и

математических дисциплин

Председатель:

_____ С.И. Сухомлинова

Протокол № 6 от 11.02.2020 г.

Автор: преподаватель Владивостокского морского

рыбопромышленного колледжа _____ С.В. Волошина

подпись

Методические указания по проведению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины Теория вероятностей и математическая статистика, утвержденной зам. начальника колледжа по УВР 31.08.17г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ 4
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 6
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 11
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 14
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4 20
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 33
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 39
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7 48
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8 53
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9 58
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10 60
ЛИТЕРАТУРА 62

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№	Название
1	Практическая работа № 1 Перестановки, сочетания.
2	Практическая работа № 2 Размещения.
3	Практическая работа № 3 Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности.
4	Практическая работа № 4 Вычисление вероятностей сложных событий, полной вероятности, использование формулы Байеса.
5	Практическая работа № 5 Вычисление вероятностей в схеме Бернулли.
6	Практическая работа № 6 Биноминальное и геометрическое распределение. Распределение Пуассона. Запись распределения и вычисление вероятностей для ДСВ. Вычисление числовых характеристик для ДСВ.
7	Практическая работа № 7 Запись интегральной функции распределения НСВ, Равномерное распределение непрерывной случайной величины. Нормальный закон распределения. Показательно распределенные величины.
8	Практическая работа № 8 Построение графической диаграммы функции распределения для заданной выборки, расчет частот. Расчет оценок параметров распределения
9	Практическая работа № 9 Проверка гипотезы о нормальном законе распределения на основе критерия согласия Пирсона
10	Практическая работа № 10 Подготовка к экзаменационной контрольной работе.

Порядок оформления:

Работа оформляется в отдельной тетради в соответствии с требованиями, предъявляемыми к практическим работам.

Работы должны быть написаны аккуратно (разборчивый почерк, оставление полей, записаны полностью условия заданий и т.п.). Приступать к выполнению практической работы следует только после проработки теоретического материала на занятиях, по материалам конспектов и учебника «Теория вероятностей и математическая статистика» под редакцией Спирина, М.С.

Практическая работа выполняется всеми учащимися, и правильность решения проверяется на доске. В каждую из практических работ входит проверочная работа, которая выполняется индивидуально каждым студентом и оценивается преподавателем.

Критерии оценки выполнения проверочных работ:

«5»-Работа должна быть выполнена правильно и в полном объёме, 90-100% выполнения.

«4»-Работа выполнена правильно, но имеются недочеты, процент выполнения 75-89%.

«3»- Работа выполнена правильно, но имеются ошибки, процент выполнения 50-74%.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Перестановки, сочетания.

Цель: Научиться решать комбинаторные задачи методом перестановки и сочетаний.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком.

Если элемент a принадлежит множеству A, то записывают $a \in A$ ($\in$ — принадлежит), если нет, то $a \notin A$.

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$($\subset$— содержится). Элементы множества B, не входящие в A, образуют множество, которое называют дополнением A и обозначается $\overline{A}$

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым множеством и записывается $\emptyset$.

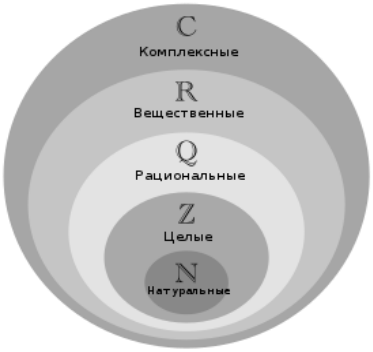
Если множество состоит из конечного числа элементов, то его называют конечным, если нет, то бесконечным.

Основные числовые множества:

Обозначение	Название	Как задается множество:
N	Натуральных чисел.	$N = \{1,2,3, \dots, n\}$
Z	Целых чисел.	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n\}$
Q	Рациональных чисел (обыкновенные, десятичные и бесконечные десятичные периодические дроби).	$Q = \frac{p}{q}$, где p — целое число, q — натуральное. Например, $\frac{3}{19}$, $0{,}25$, $1{,}6(3)$.
I	Иррациональных чисел (бесконечные десятичные непериодические дроби).Q и I не пересекаются– то есть ни одно иррациональное число	Например, π, e,0,13856 …

	невозможно представить в виде $\frac{p}{q}$рациональной дроби.	
R	Действительных (вещественных) чисел.	$R = Q + I$
C	Комплексных чисел. (выражение вида $z = a + b \cdot i$, где a , b — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица.	Например,$z = -2 + 6 \cdot i$

С помощью кругов Эйлера все множества можно изобразить в виде:



Счетные множества -это бесконечные, все элементы которых можно занумеровать.

Для того, чтобы сравнить два каких-либо множества A и B, между их элементами устанавливают соответствие. Если это соответствие взаимно-однозначное, то множества называются равномощными.

Отображение множества A во множество B – это правило, по которому каждому элементу множества Aставится в соответствие элемент (или элементы) множества B. Если в соответствие ставится единственный элемент, то данное правило называется однозначно определенной функцией или просто функцией.

Функцию, как многие знают, чаще всего обозначают буквой $f: A \to B$– она ставит в соответствие каждому элементу $a \in A$ единственное значение $f(a)$, принадлежащее множеству B.

Установленное правило f ставит в соответствие каждому студенту s множества S_1 единственную тему реферата $f(s)$ множества T.

Построенное отображение множеств имеет очень важную характеристику: оно является взаимно-однозначным или биективным (биекцией).

В данном примере это означает, что каждому студенту поставлена в соответствие одна уникальная тема реферата, и обратно – за каждой темой реферата закреплён один и только один студент.

Однако не следует думать, что всякое отображение биективно. Если на 1-й ряд (к множеству S_1) добавить 7-го студента, то взаимно-однозначное соответствие пропадёт – либо один из студентов останется без темы(отображения не будет вообще), либо какая-то тема достанется сразу двум студентам. Обратная ситуация: если к множеству Tдобавить седьмую тему, то взаимно-однозначность отображения тоже будет утрачена – одна из тем останется невостребованной.

Операции над множествами:

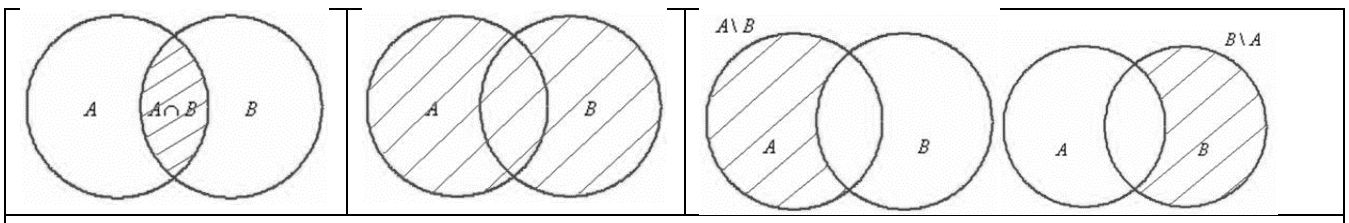
Два множества A и B равны($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B. Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. (Пример: $\mathrm{Q} \cap \mathrm{I} = \emptyset$, $\mathrm{Q} \cup \mathrm{I} = \mathrm{R}$).

Разностью множеств A и B называют множество $A \backslash B$, каждый элемент которого принадлежит множеству Aи не принадлежит множеству B.

Кроме того, иногда рассматривают симметрическую разность $A \Delta B$, которая объединяет оба «полумесяца»:$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$– иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».



Диаграммы Венна (по аналогии с кругами Эйлера) – это схематическое изображение действий с множествами.

Декартовым (прямым) произведение множеств A и Bназывается множество $A \cdot B$всех упорядоченных пар (a, b), в которых элемент $a \in A$, а элемент $b \in B$.

Ограниченность числовых множеств.

Множество X ограничено сверху (снизу), если существует такое числоM, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x < M$ $(x \geq M)$. Число M в этом случае называется верхней (нижней) гранью множества X.

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется ограниченным.

Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней множества называется точной верхней (нижней) гранью этого множества и обозначается $\sup X$ $(\inf X)$.

Перестановки, сочетания без повторений.

Пусть имеется n различных объектов. Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются перестановками, а их число равно: Pn=n!=1·2·3·...· (n−1) ·n

Символ n! называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. По определению, считают, что 0!=1, 1!=1.

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать из них m объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются сочетаниями из n объектов по m, а их число равно $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

Пусть имеется n объектов и $n_i, i = 1,2 \dots m$ из них повторяются. Будем переставлять их всеми возможными способами (Количество способов, которыми можно переставить n объектов, среди которых 1-й объект повторяется n_1 раз, 2-й объект повторяется n_2 раз, 3-й объект – n_3 раз,…, m -й объект – n_m раз). Получившиеся комбинации называются перестановками с повторением, а их число равно: $P_{n(\text{повт})} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_m!}$

Пусть имеется n множеств. Будем выбирать из них m неупорядоченных объектов, которые могут повторяться, всеми возможными способами. (Для

выбора предложено n множеств, каждое из которых состоит из одинаковых объектов. Сколькими способами можно выбрать m объектов?). Получившиеся комбинации называются сочетаниями с повторением, а их число равно:

$C_{n(\text{повт})}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$.

Время выполнения: 90 минут.

1. Задайте формулой множества, определите конечное или бесконечное оно, какие из чисел $-9, \frac{3}{5}, 1, 10, 17, 101$ принадлежат множеству, а какие - нет, с помощью кругов Эйлера изобразите расположение множеств под буквами б) и в) относительно множества натуральных чисел:

а) натуральных чисел; б) нечетных чисел; в) натуральных чисел меньше 100.

2. Какие из функций взаимно-однозначные или биективные, написать их отображения? а) $y = -\frac{x}{2}$ б) $y = x^4$ в) $y = \sqrt{x}$ г) $y = \ln x$ д) $y = \frac{x^2}{3}$ е) $y = x^3$

ж) $y = \frac{6}{x}$ з) $y = e^x$ и) $y = \cos x$ к) $y = tg\, x$ л) $y = \frac{1}{x^8}$ м) $y = 6x - 7$.

3. Выполнить операции $A \cap B,\ A \cup B,\ A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \times B,\ B \times A$ для множеств:

а) $A = \{a, 1,2\}, B = \{a, b, 1\}$ б) $A = \{2n - 1|, n \in N\}, B = \{-1,0,1,2,3\}$

в) $A = (-\infty; 3), B = [-1; \infty)$.

4. Найти sup X и inf X, если X-множество чисел: а) $[-5; 2]$ б) $(1; 4)$

в) $3 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$, где $n \in N$.

5. Сколько перестановок из четырех элементов?

6. Восемь студентов обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

7. Сколькими способами можно расставить на книжной полке 9 книг, среди которых трехтомник А.С. Пушкина и четырехтомник М.Ю. Лермонтова? (три тома Пушкина должны стоять рядом в порядке возрастания, четыре тома Лермонтова должны стоять рядом в порядке возрастания).

8. Перед стартовым свистком баскетбольного матча стартовые пятерки двух играющих команд обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

9. Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «21»? Для тех, кто не знает: выигрывает комбинация 10 + ТУЗ (11 очков) = 21 очко или два туза (порядок карт в любой паре не имеет значения).

10. Пусть у Васи живёт 4 кота и 5 кошек. Сколькими способами можно отпустить гулять 2 котов и 1 кошку?

11. Сколькими способами можно выделить делегацию в составе трех человек, выбирая их среди четырех супружеских пар, если: а) в состав делегации входят любые трое из данных восьми человек; б) делегация должна состоять из двух женщин и одного мужчины; в) делегацию не входят члены одной семьи?

12. В коробке находятся 1 зеленый шар, 2 красных и 1 черный, шары не пронумерованы. Определите число всех перестановок из четырех элементов.

13. В кошельке находится достаточно большое количество 1-, 2-, 5- и 10-рублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Размещения.

Цель: Научиться решать комбинаторные задачи методом размещения.

Пусть имеется n различных объектов. Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются размещениями из n объектов по m, а их число равно: $A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Пусть имеется множество из n различных объектов. Будем выбирать из них m упорядоченных объектов, которые могут повторяться, и переставлять всеми возможными способами между собой (Дано множество, состоящее из n объектов, при этом любой объект можно выбирать неоднократно. Сколькими

способами можно выбрать m объектов, если важен порядок их расположения в выборке?) Получившиеся комбинации называются размещениями с повторением, а их число равно:$A_{n(\text{повт})}^{m} = n^{m}$.

Время выполнения: 45 минут.

1. Сколькими способами можно составить триколор с горизонтальными полосами из 5 различных по цвету отрезов материи?

2. Сколько имеется вариантов составления расписания на понедельник, если предметов у студентов 9, а в понедельник 4 пары и предметы не повторяются? (рассмотрите 2 варианта: порядок не важен и порядок важен).

3. Сколькими способами можно назначить в группе из 30 человек трех дежурных, если: а) их роль в процессе дежурства одинакова; б) во время дежурства их функциональные обязанности различны?

4. Сколько словарей надо издать, чтобы было возможно выполнять переводы с любого из шести языков на любой другой?

5. У Васи дома живут 4 кота. а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты? б) сколькими способами можно отпустить гулять котов? в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?

6. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, у которых: а) возможны любые цифры; б) все цифры различные?

7. Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами). Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Проверочная работа № 1

Время на выполнение: 45 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 8 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 6-7 заданий.

«удовлетворительно» - верно выполнено 4-5 заданий.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 4 заданий.

В-1

1. Какие из функций взаимно-однозначные или биективные, написать их отображения? а) $y = 5x + 1$ б) $y = x^{12}$ в) $y = x^7$ г) $y = \frac{6}{x^2}$.

2. Выполнить операции $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \times B$, $B \times A$ для множеств:

$A = \{c, e, -1, -2\}, B = \{-1,6,9, e\}$.

3. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

4. В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

5. Боря, Дима и Володя сели играть в карты. Сколькими способами им можно сдать по одной карте? (колода содержит 36 карт).

6. Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

7. В коробке находятся 1 зеленый шар, 1 красный, 1 черный и 2 голубых, шары не пронумерованы. Определите число всех перестановок.

8. В комнате находится много воздушных шаров синего, красного, зеленого и голубого цвета. Сколькими способами можно взять два любых из них?

В-2

1. Какие из функций взаимно-однозначные или биективные, написать их отображения? а) $y = 4 - 2x$ б) $y = \frac{x^6}{4}$ в) $y = 2x^{13}$ г) $y = \frac{7}{x^3}$.

2. Выполнить операции $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \times B$, $B \times A$ для множеств:

$A = \{4,8,16, g\}, B = \{f, g, 9,16\}$.

3. Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

4. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

5. В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

6. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

7. Алексей занимается спортом, причём 4 дня в неделю – лёгкой атлетикой, 2 дня – силовыми упражнениями и 1 день отдыхает. Сколькими способами он может составить себе расписание занятий на неделю?

8. Сколько существует пятизначных телефонных номеров, у которых возможны любые цифры?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности.

Цель: Научиться вычислять вероятность событий по классической формуле определения вероятности.

Все, что происходит в реальной действительности, называют явлениями или событиями.

Событие называется случайным, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти. Элементарным событием (исходом) назовем каждый из возможных результатов случайного события. Множество всех возможных в результате испытаний элементарных событий называется пространством элементарных событий ($\mathbf{\Omega}$).

Невозможным называется событие $\emptyset$, которое никогда не произойдет в результате выполнения совокупности условий S.

Достоверным называется событие $\mathbf{\Omega}$, которое обязательно произойдет в данном испытании в результате выполнения комплекса условий S.

Суммой (объединением) событий A и B называется событие A+B (или $A \cup B$), состоящее в наступлении хотя бы одно из событий A или B.

Произведением (пересечением) событий A и B называется событие $A \cdot B$ (или $A \cap B$), состоящее в совместном выполнении одновременно и события A, и события B.

Несовместными называется события, если наступление одного из них в том же испытании исключает наступление другого: $A \cdot B = \emptyset$.

События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате испытаний произойдет хотя бы одно из них.

Совокупность несовместных событий A_i образует полную группу событий, если в результате единичных испытаний произойдет хотя бы одно из этих событий: $\sum_i A_i = \Omega$.

Противоположными называется два несовместных события A и $\overline{A}$, образующие полную группу событий: $A \cdot \overline{A} = \emptyset$, $A + \overline{A} = \Omega$.

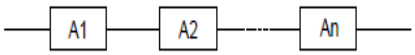
Благоприятствующими событию A называют те элементарные исходы a_i, при которых наступает событие A: $a_i \in A$.

Равновозможными называют такие элементарные события, которые при создании комплекса условий S имеют одинаковые шансы для их наступления.

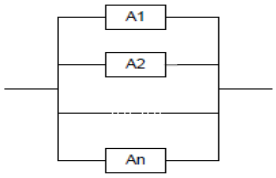
Законы двойственности (законы де Моргана): 1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Релейно-контактные схемы и их работоспособность:

1) Последовательной называется схема, в которой отказ любого элемента приводит к отказу всей системы. Работоспособностью последовательно соединенной цепи будет произведение событий: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$



2) Параллельной называется схема, которая находится в рабочем состоянии до тех пор, пока работает хотя бы один её элемент.



Работоспособностью параллельно соединенной цепи

будет сумма событий: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$

Классическое определение вероятности. Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех несовместных равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу событий: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность удовлетворяет условиям: 0≤P(A)≤1, P(A)=0, P(**Ω**)=1.

Геометрическое определение вероятности. Пусть событие А представляет собой попадание в область $g \subset G$, причем попадание в измеримую область G достоверно. Вероятность события А пропорциональна мере области g и не зависит от ее формы и расположения внутри G. Тогда геометрическая вероятность – это отношение меры подмножества g к мере множества G:$P(A) = \frac{mesg}{mesG}$, (mes в зависимости от пространства может быть мерой длины, площади, объема и т. д.)

Время выполнения: 60 минут.

1. Вычислите случайные события: 1) $\mathrm{A} + \Omega$ 2) $\mathrm{A} \cdot \Omega$ 3) $\mathrm{A} + \emptyset$ 4) $\mathrm{A} \cdot \emptyset$ 5) $\mathrm{A} + \mathrm{A}$ 6) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$.

2. Запишите события и определите пространство соответствующих элементарных событий и его мощность при подбрасывании монеты: 1) орла выпал (один раз) до восьмого подбрасывания;

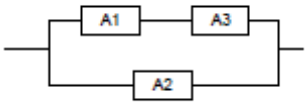
2) орла выпал (один раз) до восьмого подбрасывания, а число подбрасываний было четным;

3) было 6 испытаний, причем число выпадений орла было в два раза больше, чем выпадения решки; 4) было проведено 4 испытания, причем орел и решка выпали по 2 раза; 5) первый раз решка выпала при третьем бросании; 6) первый раз решка выпала при числе подбрасываний не более 6, но при четном числе подбрасываний;

3. Запишите заданное событие, определите мощность полученного множества. При подбрасывании игральной кости выпало: 1) четное число очков, менее 5; 2) нечетное число очков; 3) число очков более 2; 4) четное число очков,

не превосходящее 2; 5) нечетное число очков, не менее 6; 5) нечетное число очков, не превосходящее 3.

4. По рисунку запишите состояния A и $\overline{A}$, соответствующее рабочему и не рабочему состоянию цепи.



5. Сколько принципиально различных схем можно составить из четырех одинаковых элементов? Нарисуйте их и вычислите состояние работоспособности (все элементы цепи находятся в рабочем состоянии).

6. Автоматическая система состоит из пяти параллельно соединенных узлов. По разным причинам за время работы каждый из этих узлов, независимо от остальных, может выйти из строя. 1) Сколько существует различных вариантов состояния системы к концу работы? 2) Сколько среди них таких, для которых хотя бы один узел оказывается не вышедшим из строя?

7. Опишите рабочее состояние контактных схем, представленных на рисунках:

1) рис. 1 2) рис. 2 3) рис. 3 4) рис. 4 5) рис. 5 6) рис. 6.

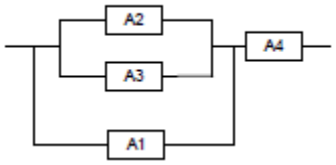
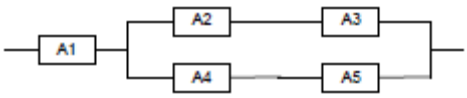
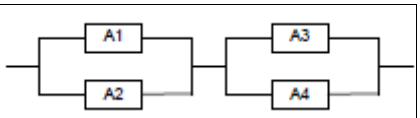
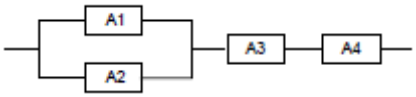
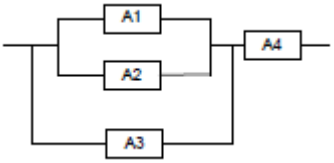
		

рис. 1	рис. 2	рис. 3
		
рис. 4	рис. 5	рис. 6.

8. Какова вероятность, что посадочный авиабилет эконом-класса, выданный на стойке регистрации авиарейса без предварительного бронирования, будет (в эконом-классе в одном ряду 6 мест: A, B, C, D, E, F): 1) иметь номер D; 2) в левой части салона; 3) у иллюминатора; 4) иметь номер F; 5) иметь одного соседа; 6) иметь в ряду места слева от себя.

9. Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 64 равных кубика, из которых наугад выбирается один кубик. Какова вероятность того, что он будет содержать: 1) ровно одну окрашенную грань; 2) ровно две окрашенные грани; 3) ровно три окрашенные грани; 4) хотя бы одну окрашенную грань; 5) более трех окрашенных граней; 6) не менее двух окрашенных граней.

10. Решить задачи: 1) какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 41 до 60 (включительно) делится на 5? 2) какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 20 до 75 (включительно) кратно 15? 3) какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 11 до 20 (включительно) является простым? 4) какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 20 до 70 (включительно) - четное?

11. Какова вероятность с первого раза отгадать четырехзначный пин-код пластиковой карты?

12. Точка достоверно попадает внутрь эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$. Найдите вероятность попадания точки (случайное событие А) в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом, заданным неравенством $x^2+y^2\leq 16$.

Проверочная работа № 2

Время на выполнение: 30 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 8 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 6-7 заданий.

«удовлетворительно» - верно выполнено 4-5 заданий.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 4 заданий.

В-1

1. Запишите события и определите пространство соответствующих элементарных событий и его мощность при подбрасывании монеты: «орел выпал два раза до пятого подбрасывания».

2. Сколько принципиально различных схем можно составить из трех одинаковых элементов? Нарисуйте их и вычислите состояния A, когда цепь будет

работать (разные элементы цепи могут находиться как в рабочем, так и не в рабочем состоянии, но цепь должна работать).

3. Автоматическая система состоит из четырех параллельно соединенных узлов. По разным причинам за время работы каждый из этих узлов, независимо от остальных, может выйти из строя. Сколько существует различных вариантов состояния системы к концу работы?

4. Какова вероятность, что посадочный авиабилет бизнес-класса, выданный на стойке регистрации авиарейса без предварительного бронирования, будет (в бизнес-классе в одном ряду 4 места: A, B, C, D): 1) иметь номер D; 2) у иллюминатора; 3) иметь одного соседа.

5. В мешке лежат вопросы для викторины из разных городов: Москва - 3 вопроса, Санкт-Петербург - 2 вопроса, Вашингтон - 1 вопрос. Какова вероятность вытянуть наугад вопрос из России?

6. Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 125 равных кубика, из которых наугад выбирается один кубик. Какова вероятность того, что он будет содержать: 1) ровно одну окрашенную грань; 2) ровно две окрашенные грани; 3) ровно три окрашенные грани; 4) хотя бы одну окрашенную грань; 5) более трех окрашенных граней; 6) не менее двух окрашенных граней?

7. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 30 до 90 (включительно) кратно 4?

8. Точка попадает внутрь окружности $x^2 + y^2 = 36$. Найдите вероятность попадания точки (случайное событие A) в кольцо, ограниченное окружностью и эллипсом, заданным неравенством $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1$.

В-2

1. Запишите события и определите пространство соответствующих элементарных событий и его мощность при подбрасывании монеты: «орел выпал три раза до пятого подбрасывания».

2. Сколько принципиально различных схем можно составить из трех одинаковых элементов? Нарисуйте их и вычислите состояния $\bar{A}$, когда цепь не

будет работать (разные элементы цепи могут находиться как в рабочем, так и не в рабочем состоянии, но цепь не должна работать).

3. Автоматическая система состоит из шести параллельно соединенных узлов. По разным причинам за время работы каждый из этих узлов, независимо от остальных, может выйти из строя. Сколько существует различных вариантов состояния системы к концу работы?

4. Какова вероятность, что посадочный авиабилет бизнес-класса, выданный на стойке регистрации авиарейса без предварительного бронирования, будет (в бизнес-классе в одном ряду 4 места: A, B, C, D): 1) в левой части салона; 2) иметь номер F; 3) иметь в ряду места слева от себя.

5. В мешке лежат вопросы для викторины из разных городов: Волгограда - 2 вопроса, Владивостока - 3 вопроса, Филадельфии - 2 вопроса. Какова вероятность вытянуть наугад вопрос не из России?

6. Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 216 равных кубика, из которых наугад выбирается один кубик. Какова вероятность того, что он будет содержать: 1) ровно одну окрашенную грань; 2) ровно две окрашенные грани; 3) ровно три окрашенные грани; 4) хотя бы одну окрашенную грань; 5) более трех окрашенных граней; 6) не менее двух окрашенных граней?

7. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 3 до 30 (включительно) является делителем числа 48?

8. Точка достоверно попадает внутрь эллипса $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$. Найдите вероятность попадания точки (случайное событие A) в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом, заданным неравенством $x^2+y^2\leq 25$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Вычисление вероятностей сложных событий, полной вероятности, использование формулы Байеса.

Цель: Научиться вычислять вероятность сложных событий, полной вероятности, использовать формулу Байеса.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность случайного события A при условии, что событие B произошло. Ее можно вычислить по формуле: $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ (вероятность события B, вычисленная в предположении того, что событие A уже произошло, называется условной вероятностью наступления события B и обозначается через $P_A(B)$. При этом события A и B называют зависимыми событиями).

Вероятность совместного появления событий A и B равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого:

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

События A и B называются попарно независимыми, если появление события B не изменит вероятность появление события A, т.е. $P_A(B) = P(A)$. Вероятность произведения независимых событий A и B равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Если два события не являются независимыми, то они называются зависимыми. Если событие A зависит от исхода B, то $P_A(B) \neq P(A)$. Пусть дано некоторое множество событий $A = \{A_1, A_2, \dots A_k\}$

Элементу $A_p \in A$ поставим в соответствие множество B_p, составленное из произвольных комбинаций (произведений) из числа оставшихся событий, где каждое представлено не более одного раза. Тогда события $A_1, A_2, \dots A_k$ называются независимыми в совокупности, если для любого $p \leq k$ и любого события $C \in B_p$ события A_p и C попарно независимы.

Следствия:

1. Если события $A_1, A_2, \dots A_k$ независимы в совокупности, вероятность их совместного осуществления равна произведению их вероятностей: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

2. Вероятность совместного осуществления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность всех

остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предложении, что все предыдущие события уже произошли:

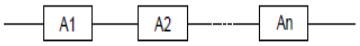
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

4. Вычисление вероятности суммы событий можно рассчитать по формулам:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}).$$

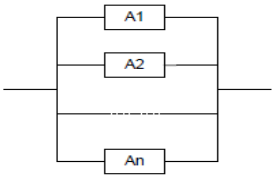
Надежностью системы называется вероятность ее работоспособности - $P(A)$. A - работоспособность системы.



При последовательном соединении:

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, $P(\bar{A}) = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

При параллельном соединении:



$P(A) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) =$
$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n)$ (этой формулой удобнее пользоваться, когда в условии задачи известна вероятность не работоспособности цепи)

$P(A) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. (этой формулой удобнее пользоваться, когда в условии задачи известна вероятность работоспособности цепи)$P(\bar{A}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n)$.

! Последовательному соединению соответствует произведение событий, параллельному соединению - сумма событий.

Формула полной вероятности.

Рассмотрим зависимое событие A , которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые

образуют полную группу. Пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$ - формулы полной вероятности.

Формула Байеса.

Пусть событие A наступило в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, \dots, B_n$. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

При условии, что событие A уже произошло, вероятности гипотез переоцениваются по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза 2;

…

$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$ – это априорные (оцененные до испытания) вероятности.

$P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ – это апостериорные (оцененные после испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами» – с учётом того факта, что событие A достоверно произошло.

! Заметьте, что в задачах на формулы Байеса в условии обязательно фигурирует некое произошедшее событие.

Время выполнения: 60 минут.

1. В конверте находится 10 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных. Из конверта последовательно извлекаются билеты. Найти вероятности того, что:

а) 2-й извлечённый билет будет выигрышным, если 1-й был выигрышным; б) 3-й будет выигрышным, если предыдущие два билета были выигрышными; в) 4-й будет выигрышным, если предыдущие билеты были выигрышными.

2. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут белыми;

б) оба шара будут чёрными;

в) сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

3. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут извлечены два туза подряд?

4. Из 20 экзаменационных билетов 3 содержат простые вопросы. Пять студентов по очереди берут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами

5. Вероятность сбоя системы контроля в международном аэропорту при проносе взрывного устройства в качестве ручной клади равна $p = 10^{-6}$. Оцените вероятность террористической атаки на борту авиалайнера, если террористов - не более $\frac{1}{100000}$ от числа пользующихся авиатранспортом.

6. Банкомат дает три попытки ввести правильный пин - код, в противном случае карточка блокируется. Какова вероятность успешного взлома?

7. Приехавшему на каникулы сыну, мама дала телефонную карту, чтобы он позвонил. Срок действия карты заканчивается через 3 месяца (91 день) после первого звонка (активации). Мать не помнит, когда была активирована карта, но сыну удалось по ней позвонить. Какая вероятность, что через неделю данной картой можно воспользоваться повторно?

8. Вычислите надежность цепей изображенных на рисунках, предполагая надежность каждого элемента A_i, равной p_i. а) рис. 1 б) рис. 2 в) рис. 3 г) рис. 4 д) рис. 5 е) рис. 6 ж) рис. 7.

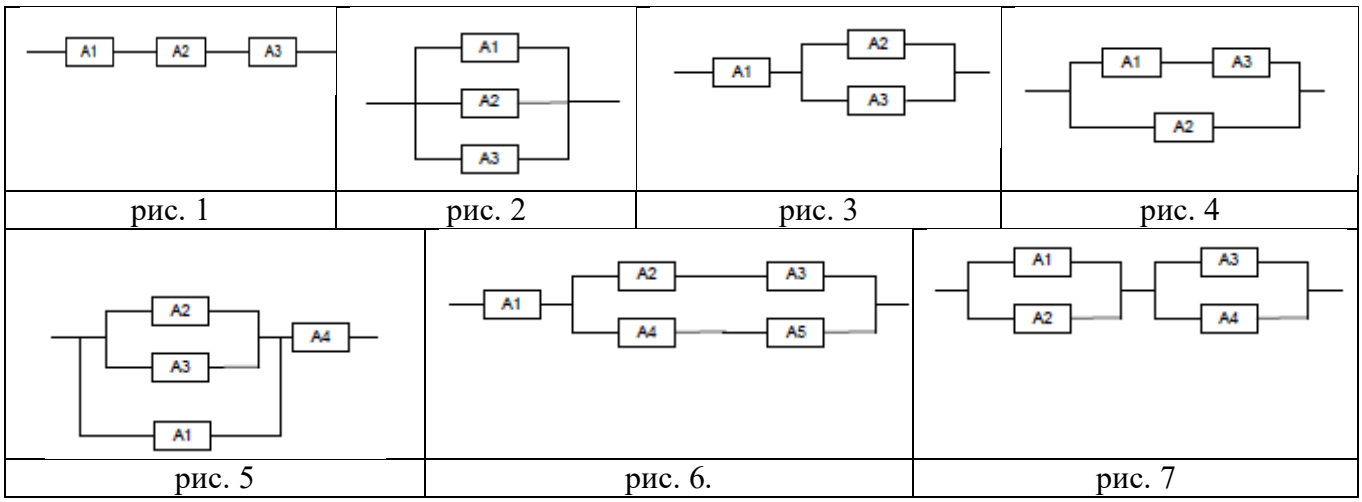


рис. 1	рис. 2	рис. 3	рис. 4

рис. 5	рис. 6.	рис. 7

9. Три стрелка, попадающие в цель независимо друг от друга с вероятностями 0,7, 0,4 и 0,3, соответственно, выстрелили по мишени одновременно.

а) не образовалось ни одной пробоины; б) образовалась одна пробоина; в) образовались три пробоины; г) образовалась хотя бы одна пробоина; д) образовалось не менее двух пробоин;

е) образовалось не более двух пробоин?

10. В торгах участвуют Кинешминский пластиковый завод (КПЗ) и Урюпинский комбинат детского питания (УКДП). Вероятность возрастания индекса ценных бумаг для КПЗ - 0,5, а для УКДП - 0,2. Вероятность возрастания индекса ценных бумаг для обеих организаций - 0,15. Какова вероятность:

а) индекс на торгах возрастет хотя бы для одной из ценных бумаг;

б) индекс на торгах не возрастет ни у одной из ценных бумаг.

11. 30 % населения ищет квартиры по объявлениям в газетах, 35 % - по интернету. 18 % населения ищут квартиры и по объявлениям в газетах и по интернету. Какова вероятность:

а) найти квартиру хотя бы из одного из источников;

б) не найти квартиру ни по объявлениям в газетах, ни по интернету.

12. Вероятность попадания зенитной установки по мишени при каждом выстреле 0,7. Сколько выстрелов надо сделать, чтобы с вероятностью не менее 0,99 уничтожить боевую единицу противника?

13. В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попадания в мишень для данного стрелка соответственно равны 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из случайно выбранной винтовки?

14. Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

15. В троллейбусном управлении среди водителей работают 70 % женщин и 30 % мужчин, а по статистике внештатных ситуаций по троллейбусам, каждый водитель - мужчина в среднем попадает в два раза реже, чем водитель - женщина. Какова вероятность (в процентах), что прохожий, наблюдающий внештатную ситуацию с участием троллейбуса, зайдя в него, увидит водителя - женщину?

16. Статистика запросов кредитов в банке: 10 % - государственные организации, 30 % - другие банки, остальные - физические лица. Вероятность невозврата взятого кредита соответственно равны: 0,01, 0,05 и 0,2. а) Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит;

б) Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента не пропечатано. Какова вероятность, что этот кредитор - банк.

17. Легковых автомобилей у АЗС проезжает вчетверо больше, чем грузовых. Вероятность того, что проезжающий автомобиль подъедет на заправку, составляет для грузового автомобиля 0,05, для легкового - 0,15. а) К месту, где расположена АЗС, приближается какой - то автомобиль. Чему равна вероятность, что он подъедет на заправку? б) Только что от бензоколонки отъехал заправленный автомобиль. Какова вероятность того, что это был грузовик?

18. 30 % пациентов, пришедших на обследование в туберкулезный диспансер, принадлежит 1-й социальной группе, 20 % - 2-й, 50 % - 3-й. Вероятность заболевания туберкулезом для каждой из этих социальных групп

равна соответственно 0,02, 0,03, 0,01. Анализы случайно выбранного пациента показали наличие этого заболевания. а) Найти вероятность того, что это представитель 3-й группы. б) У представителей какой социальной группы наибольшая вероятность заболеть?

19. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает в среднем 0,2 % брака, второй -

0,1 % брака, продукция, поступившая с третьего автомата, не содержит бракованных изделий. На сборку поступило 2000 деталей с первого автомата, 3000 деталей со второго автомата и 5000 деталей с третьего автомата. а) Найти вероятность того, что выбранная наугад из всех этих деталей будет бракованной. б) Какова вероятность того, что деталь, выбранная наугад, поступила с первого автомата, если известно, что она является не бракованной?

20. Груз нужно доставить из пункта А в пункт В за сутки. Туда есть три маршрута. Водитель выбирает дорогу наугад. Он успеет добраться до пункта назначения за сутки с вероятностью 0,6 - для первого, 0,3 - для второго, 0,1 - для третьего маршрутов. а) Найти вероятность, что водитель приедет в пункт В за сутки. б) Водитель приехал в пункт В в течение суток. Какова вероятность, что он ехал по второму маршруту? в) Водитель не смог приехать в пункт В в течение суток. Какова вероятность, что он ехал по третьему маршруту?

21. На матч ЦСКА продают билеты 3 кассы. Касса №1 продает билеты треть очереди, касса №2 - половине очереди, а касса №3 - шестую часть очереди. Вероятность купить билет в виб-зону стадиона для кассы №1 равна $\frac{1}{6}$, для кассы №2 - $\frac{1}{4}$, для кассы №3 - $\frac{1}{8}$.

а) Какова вероятность купить билет в виб-зону?

б) Вам купили билет. В какой кассе вероятнее всего был приобретен билет?

22. Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин - дальтоники. Будем считать, что количество мужчин и мужчин и женщин одинаково. В кабинет к врачу-окулисту должен зайти новый пациент. а) Какова вероятность, что он

страдает дальтонизмов? б) Вновь зашедший пациент страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина?

23. Решить задачи с помощью построения схемы (графа):

а) В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что до окончания расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95, для полуавтомата - 0,8. Студент производит расчет на машине, выбранной наудачу. Найдите вероятность, что до окончания расчета машина выйдет из строя.

б) Вероятность продать все билеты на круиз по Волге, если курс доллара по отношению к рублю не повысится, равна - 0,93, а если повысится - 0,85. По оценкам экономистов, вероятность подъема доллара во время сезона - 0,26. Найти вероятность, что все билеты будут проданы.

в) В группе 30 студентов, 12 из них - юноши. Половина юношей и треть девушек живут в общежитии. Найти вероятность, что случайный человек, выбранный из группы, живет в общежитии.

г) Результаты медицинских исследований показывают, что если пациент болен инфекционным заболеванием ПГМ, то тест дает правильный результат в $p = 95\%$ тестов, а если не болен, то тест дает положительный результат для $q = 3\%$ тестируемых. Заражению этим видом инфекции подвержено только $P = 7\%$ населения. Первоклассник Вовочка во время обязательной медицинской проверки для получения справки в бассейн получил положительный результат теста. Найдите вероятность, что он действительно заражен этим видом инфекции.

д) Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $\frac{2}{5}$ сообщений «точка» и $\frac{1}{3}$ сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5:3.

24) С какой вероятностью можно принять сигнал «точка»?

Проверочная работа № 3

Время на выполнение: 30 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 13-14 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 10-13 заданий.

«удовлетворительно» - верно выполнено 7-9 заданий.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 7 заданий.

В-1

1. Имеется три партии ламп по 20, 30, 50 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из ста данных ламп проработает заданное время?

2. Имеются три одинаковые урны с шарами: в первой - 4 белых и 6 красных, во второй 7 белых и 3 красных, в третьей – 8 белых и 2 красных. Бросают игральную кость. При выпадении одного, двух, трех очков вынимают шар из первой урны, если выпало четыре очка - из второй, если выпало пять или шесть очков - из третьей урны.

а) Найти вероятность того, что вынутый шар - белый.

б) Руководитель эксперимента определил урну и дал вынуть из нее шар ассистенту, который не знает ее номера. Он оказался белым. Определите наиболее вероятную урну, из которой он мог быть извлечен.

3. Решить задачи с помощью построения схемы (графа):

Имеется пять винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, без оптического прицела - 0,8. Найдите вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки.

4. Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет от 2 до 4 изделий первого сорта?

5. Две одинаковые монеты радиуса $r = 2$ расположены внутри круга радиуса $R = 6$ и не перекрываются. В круг радиуса R наудачу бросают точку. Найдите вероятность того, что эта точка попадет на одну из этих монет.

6. В течение двух часов к причалу должны подойти два теплохода. Стоянка каждого теплохода у причала по расписанию составляет 40 минут. Определите вероятность встречи судов у причала, если моменты подхода их к причалу в течение двух часов независимы и равновозможны.

7. Фирма предлагает в продажу со склада партию из 15 компьютеров, 6 из которых - с дефектами. Колледж приобретает 7 из них, не зная о возможных дефектах. Найдите вероятность того, что среди приобретенных компьютеров окажутся два с дефектами.

8. В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара. Найти вероятность того, что третий шар окажется белым, если до этого был извлечён черный и красный шары.

9. Вычислите надежность цепи изображенной на рисунке, предполагая надежность каждого элемента A_i, равной p_i.

10. Случайный встречный студент из ФРГ изучает английский с вероятностью 0,8, а немецкий - 0,3. Вероятность изучения сразу двух языков равна 0,2. Какова вероятность, что: а) студент изучает хотя бы один язык; б) студент изучает оба языка;

11. Вероятность того, что станок A выйдет из строя в течение смены, равна 0,1, а для станка B - 0,05. Вероятность того, что оба станка выйдут из строя в течение смены - 0,01. Какова вероятность, что:

а) выйдет из строя хотя бы один станок; б) не выйдут из строя оба станка.

12. Студент ходит в три библиотеки. Нужная ему книга может быть в них с вероятностями 0,5, 0,6 и 0,7 соответственно. Какова вероятность, что студент найдет нужную ему книгу?

13. Отряд противоракетной обороны оснащен тремя системами ПРО разных поколений, поражающих цель с вероятностью 0,75, 0,8 и 0,95 соответственно,

способных независимо сбивать цель одной ракетой. Какова вероятность, что мишень останется непораженной?

14. На пересдачи экзамена трое студентов пытаются, не совещаясь решить одну и ту же задачу. Вероятности решить задачу равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Какова вероятность, что хоть один студент решит задачу?

В-2

1. В ящике находятся детали, из которых 12 изготовлены на первом станке, 20 - на втором и 16 - на третьем. Вероятности того, что детали, изготовленные на первом, втором и третьем станках, стандартные, соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,6. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь окажется стандартной.

2. В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

а) он был подготовлен очень хорошо;

б) был подготовлен средне;

в) был подготовлен плохо.

3. Решить задачи с помощью построения схемы (графа):

По каналу связи передается один из сигналов «0» или «1». Сигнал «1» передается в среднем втрое чаще, чем «0». Вследствие искажений вместо переданного сигнала на приемник может быть зафиксирован противоположный сигнал. При этом сигнал «0» искажается в среднем в 10 % случаев, а сигнал «1» - в 20 % случаев. Найти вероятность, что переданный на приемник сигнал, будет «0».

4. Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 60% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу отобранных изделий будет не менее 5 изделий первого сорта?

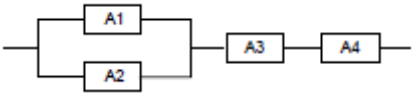
5. Точку бросают наугад в круг радиуса $R = 8$. Какова вероятность того, что расстояние от точки до центра круга превысит половину радиуса?

6. Два друга условились встретиться в промежутке времени от 18 ч. до 18 ч 15 мин, причем каждый обещал ждать другого не более 5 минут, после чего уходит. Из двух событий «встреча произойдет» и «встреча не произойдет» какое наиболее вероятно?

7. Для участия в судебном процессе из 20 потенциальных кандидатов, среди которых 5 женщин и 15 мужчин, выбирают 12 присяжных заседателей. Какова вероятность, что после отбора в группе окажутся только две женщины?

8. В урне 6 черных, 5 красных и 4 белых шара. Последовательно извлекают три шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным и третий – белым?

9. Вычислите надежность цепи изображенной на рисунке, предполагая надежность каждого элемента A_i, равной p_i.



10. Электронный прибор состоит из двух последовательно включенных блоков. Вероятность выйти из строя за один месяц работы первого блока равна $\frac{1}{3}$, второго - $\frac{1}{4}$, а обоих - $\frac{1}{6}$. Какова вероятность, что: а) хотя бы один прибор выйдет из строя; б) безаварийной работы прибора в течение месяца;

11. Для подсчета числа покупателей в магазине при входе установлен «электронный глаз». Если в магазин входят одновременно два покупателя, причем один идет перед другом, то первый из них будет зафиксирован электронным устройством с вероятностью 0,96, второй - с вероятностью 0,93, а оба - с вероятностью 0,91. Какова вероятность, что устройство: а) сканирует хотя бы одного покупателя; б) не сканирует ни одного из двух входящих вместе покупателей.

12. Технологический процесс контролируется тремя независимо работающими приборами, вероятность отказа которых 0,1, 0,15 и 0,2 соответственно. Какова вероятность, что хоть один прибор выйдет из строя?

13. Двум программистам поручили написать программу до следующего утра. Вероятность успешного выполнения задания первым равна 60 %, а второго - 90 %. Какова вероятность, что задание будет выполнено?

14. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательных элементов. Вероятности отказа элементов, соответственно, равны 0,2, 0,3 и 0,4. Определите вероятность того, что разрыва цепи не произойдет.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Вычисление вероятностей в схеме Бернулли.

Цель: Научится вычислять вероятность с помощью формулы Бернулли, локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа.

Независимым повторным испытанием называются испытания, когда вероятность появления события A в любом из них не зависит от исходов в других испытаниях. Пусть производятся независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ с постоянной вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$, причем события $A_1, A_2, \dots, A_k$ образуют полную группу, т.е. в каждом испытании обязательно должно происходить одно из них, и только одно: $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Независимым повторным испытанием при $\mathrm{k} = 2$, т.е. где возможно появление лишь двух событий (например, выпадение орла или решки при подбрасывании монеты), называются испытаниями Бернули.

Вероятность P_n^m того, что в n независимых испытаниях некоторое случайное событие A наступит ровно m раз, равна: $P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где p – вероятность появления события A в каждом испытании; $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события A в каждом испытании; C_n^m - биномиальный коэффициент.

Сформулируем строгий критерий схемы Бернули: для отыскания наивероятнейшего числа m_0 появлений случайного события A в n независимых испытаниях (с вероятностью p в каждом испытании) руководствуются следующим двойным неравенством: $np - q \leq m_0 < np + p$, причём:

1) если значение $np - q$ – дробное, то существует единственное наивероятнейшее число m_0; в частности, если np – целое, то оно и есть наивероятнейшее число: $np = m_0$;

2) если же $np - q$ – целое, то существуют два наивероятнейших числа: m_0 и $m_0 + 1$.

В случаях, когда общее число испытаний велико, вероятность успеха в каждом испытании постоянна, но не мала (близка к 0,5, если вероятность близка к 0 или 1, результат может быть далеким от истины), пользоваться формулой Бернулли (количество испытаний 50 - 100, иначе результат может быть далеким от истины) технически непросто из-за факториала большого числа.

Локальная формулы Лапласа (для $npq > 10$):

Если в n независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к 0 и 1, то при большом количестве испытаний вероятность того, что событие A произойдет m раз, приближенно равна: $P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. В случае, когда $|x| \leq 5$, можно пользоваться табличными значениями $\varphi(x)$ (данная функция – четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$), при $|x|$, заметно большем 5, аргумент экспоненты становится большим отрицательным числом и соответствующие вероятности очень малы.

Интегральная формулы Лапласа (для $npq > 10$):

Если в n независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к 0 и 1, то при большом количестве испытаний вероятность того, что частота m события A находится в интервале $[m_1; m_2]$ ($\Delta m = m_2 - m_1$ заметно больше 1, иначе удобнее пользоваться локальной формулой Лапласа), приближенно равна:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

В случае, когда $|x| \le 5$, можно пользоваться табличными значениями $\Phi(x)$ (данная функция – нечетная: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$), при $|x|$, заметно большем 5, аргумент экспоненты можно считать $\Phi(x) = 0{,}5$.

Время на выполнение: 60 мин.

1. Игральную кость бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 5 очков: а) не выпадут (выпадут 0 раз); б) выпадут 2 раза; в) выпадут 5 раз. Результаты округлить до 4 знаков после запятой.

2. Вероятность выхода из строя каждого из четырех лифтов сектора «В» МГУ им. М.В. Ломоносова, поднимающих на этажи со 2-го по 9-й, равна $p = 0{,}1$. Определите вероятность, что: а) работают все лифты; б) работает половина всех лифтов; в) работает хотя бы один лифт; г) не работает только один лифт; д) работают лифты №2 и №4; е) не работает ни один лифт.

3. Производится 8 выстрелов по цели, в каждом из которых вероятность попадания равна 0,1. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.

4. Монета подбрасывается 9 раз. Найти вероятность наивероятнейшего числа появлений орла.

5. В ящике 100 стандартных деталей и 20 бракованных. Из ящика берут деталь, регистрируют ее качество и возвращают на место. Наиболее вероятное число достать стандартную деталь равно 15. Сколько деталей успели проверить?

6. В страховой компании 10000 клиентов, имеющих страховку на случай пожара. По имеющимся статистическим данным и оценкам экспертов страховой случай по пожарам за срок страховки наступает в 200 случаев на миллион. Какова вероятность, что в текущем году страховой компании придется выплачивать причитающуюся страховую сумму: а) трем клиентам; б) не более чем одному клиенту; в) менее чем трем клиентам; г) не придется выплачивать вовсе; д) не менее чем трем клиентам; е) не более пяти клиентам?

7. Не зная ни один ответ, но пытаясь отвечать на вопросы тестов интуитивно, студент угадывает примерно 5 ответов из тысячи вопросов. Какова вероятность, что в тесте из 60 вопросов студент угадает: а) не менее двух ответов; б) один правильный ответ; в) не угадает ничего; г) от двух до четырех ответов; д) не более одного ответа; е) пять правильных ответов?

8. На новогодний праздник «Елка-2013» мэрия города выделила 6000 елочных игрушек в детский дом. Вероятность того, что некоторые стеклянные игрушки разобьются, равна 0,0005. Найдите вероятность того, что дети, разбирая игрушки, обнаружат 6 разбитых шариков.

9. По результатам отправок производителем дистрибьютору различных партий жестких дисков (HDD), прошедших заводскую проверку, выяснилось, что в среднем при транспортировке повреждается два винчестера независимо от объема партии. Найдите вероятность того, что: а) будет повреждено четыре изделия; б) будет повреждено не более одного диска; в) будет повреждено два диска; г) будет повреждено не менее двух дисков; д) все винчестеры прибудут в сохранности; е) будет повреждено не более трех дисков HDD.

10. Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:а) 200 раз; б) 225 раз (значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ определите с помощью таблицы).

11. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек.Результаты округлить до 4 знаков после запятой (значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ определите с помощью таблицы).

12. Поэт Немиров очень любит петь и общаться с новыми людьми. Он готов обнять любого прохожего и предложить спеть патриотическую песню, при этом 10 % респондентов готовы ему в этом посодействовать. Поэтические силы в нем заканчиваются примерно на 200-м прохожем. Какова вероятность, что чести встретиться с настоящим поэтом в этот раз удостоится: а) 10-15 прохожих; б) 15-

17 прохожих; в) 35-40 прохожих; г) 35 прохожих; д) 25-30 прохожих; е) 20 прохожих.

13. В каждом из 500 независимых испытаний на всхожесть событие А – прорастание исследуемого семени – происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что среди 500 посаженных семян взойдет менее 235.

14. Вероятность банкротства малого предприятия после проверки Минфина равна 0,3. Найти вероятность, что после проверки из 1500 малых предприятий обанкротится: а) не менее 400; б) менее 450; в) 440-455; г) более 420; д) 400-500; е) 470 и более.

15. Вероятность поражения стрелком мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 65 до 80 раз.

16. В институте обучается 1000 студентов. В столовой имеется 105 посадочных мест. Каждый студент отправляется в столовую на большой перемене с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что в обычный учебный день: а) столовая будет заполнена не более чем на две трети;б) посадочных мест на всех не хватит.

Проверочная работа № 4

Время на выполнение: 30 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 4 задания.

«хорошо» - верно выполнено 3 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 2 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 2 задания.

В-1

1. В питомнике 40 вакцинированных кроликов и 10 контрольных. Осуществили проверку 14 кроликов и результат зарегистрировали. Определите наиболее вероятное число появления контрольного кролика.

2. В японской компании, известной своим трепетным отношением к персоналу, работает 2000 сотрудников. Каждому имениннику нужно подготовить

подарок и поздравление. Какова вероятность, что 1 апреля является днем рождения одновременно (в году 365 дней, λ округлить до десятых):

а) трех сотрудников компании;

б) не более чем трех сотрудников компании;

в) не менее чем двух сотрудников компании;

3. В неудачной партии автомобилей существует вероятность поломки карбюратора - 10% . Перед принятием решения об отзыве всей партии автомобилей, завод проводит тест на именно этот вид поломки. Определите вероятность того, что из 200 проверенных автомобилей 6-10 будут содержать этот дефект.

4. На заводе работает 2000 рабочих. Вероятность выйти на работу в свой выходной день равна 0,2 для каждого рабочего. Определите вероятность, что в свой выходной будут работать:

а) не менее 340 рабочих;

б) 350-400 рабочих.

В-2

1. В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найдите наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

2. В японской компании, известной своим трепетным отношением к персоналу, работает 2000 сотрудников. Каждому имениннику нужно подготовить подарок и поздравление. Какова вероятность, что 1 апреля является днем рождения одновременно (в году 365 дней, λ округлить до десятых):

а) не более чем пяти сотрудников;

б) двух сотрудников компании;

в) ни одного из сотрудников компании;

3. В неудачной партии автомобилей существует вероятность поломки карбюратора - 10% . Перед принятием решения об отзыве всей партии автомобилей, завод проводит тест на именно этот вид поломки. Определите

вероятность того, что из 200 проверенных автомобилей 11-15 будут содержать этот дефект.

4. На заводе работает 2000 рабочих. Вероятность выйти на работу в свой выходной день равна 0,2 для каждого рабочего. Определите вероятность, что в свой выходной будут работать:

а) не менее 500 рабочих;

б) 250-600 рабочих.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Биноминальное и геометрическое распределение. Распределение Пуассона. Запись распределения и вычисление вероятностей для ДСВ. Вычисление числовых характеристик для ДСВ.

Цель: Научиться вычислять числовые характеристики и распределения для ДСВ.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины делятся на 2 группы:

1) Дискретная (прерывная) случайная величина (ДСВ) – принимает отдельно взятые, изолированные значения с определенными ненулевыми вероятностями. Количество этих значений конечно либо бесконечно, но счётно.

2) Непрерывная случайная величина (НСВ) – принимает все числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Закон распределения ДСВ – это правило, устанавливающее соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Поскольку случайная величина X обязательно примет одно из значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то соответствующие события образуют полную группу и сумма вероятностей их наступления равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$ или, если записать свёрнуто: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Иногда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют классическое определение вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей событий.

Математическое ожидание ДСВ - это среднеожидаемое значение при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно сумме произведений всех её значений на соответствующие вероятности:

$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n$или в свёрнутом виде:

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.

(т.е. чем больше испытаний мы проводим, тем ближе среднее значение x_i значению $M(X)$).

Мода ДСВ ($M_0(X)$) – это значение ДСВ, вероятность которого наибольшая. Значение ДСВ, вероятность которого наименьшая называется антимодой.

Дисперсия ДСВ - это математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания:

$D(X) = M[X - M(X)]^2$ или $D(X) = [X - M(X)]^2 \cdot p_i$

(т.е. дисперсия - это количественная оценка рассеянности значения случайной величины относительно математического ожидания).

Более простой способ нахождения дисперсии через $M(X)$ и $M(X^2)$:

$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2$ или

$$D(X) = {x_1}^2 \cdot p_1 + {x_2}^2 \cdot p_2 + {x_3}^2 \cdot p_3 + \ldots + {x_n}^2 \cdot p_n - \big(M(X)\big)^2$$

Средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением СВ X называется квадратный корень из дисперсии ДСВ: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

(т.е. если мы отклонимся от математического ожидания M(X) влево и вправо на среднее квадратическое отклонение «сигма» $\sigma(X)$: $\big(M(X) - \sigma(X); M(X) + \sigma(X)\big)$ – то на этом интервале будут «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины).

Многоугольником распределения вероятностей (полигон) данной величины называют ломаную, звенья которой соединяют соседние точки $(x_i; p_i)$.

(При выполнении чертежа от руки по возможности придерживайтесь следующего масштаба: горизонтальная ось: 1 ед. = 2 тетрадные клетки (1 см); вертикальная ось: 0,1 = 2 тетрадные клетки. Если значения x_i достаточно велики, то ось абсцисс можно «разорвать» (не чертить её кусочек после единицы), и справа продолжить нумерацию, например, с 20).

Функция распределения случайной величины обозначается $F(X)$. Она определяется одинаково для дискретной, и для непрерывной случайной величины: $F(X) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем переменная x, которая «пробегает» все действительные значения (от «минус» до «плюс» бесконечности).

Биномиальным называется закон распределения $\boldsymbol{x_i}$ - числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых A появляется с постоянной вероятностью - p. Вероятность значения x_i вычисляется по формуле Бернулли: $p_i = P_n^{x_i} = C_n^{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot q^{n-x_i}$, где:

n – количество независимых испытаний;

$x_i = \{1,2,\dots,n\}$ – сколько раз может появиться событие A в данной серии испытаний (список всех возможных значений);

p – вероятность появления события A в каждом испытании;

$\mathrm{q} = 1 - \mathrm{p}$ – вероятность не появления события A в каждом испытании.

Сведём этот закон распределения в таблицу:

X	x_i	0	1	2	…	n
	p_i	$C_n^0 \cdot q^n$	$C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	$C_n^n \cdot p^n$

Вероятности p_i представляют собой члены бинома Ньютона, благодаря чему распределение и получило своё название. По формуле бинома:

$$C_n^0 \cdot q^n + C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \cdots + C_n^n \cdot p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$$

Числовые характеристики биномиального распределения: $M(X) = n \cdot p$, $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

Дискретная СВ X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения $x_i = 1,2,3, \ldots$ с вероятностями $p_i = p \cdot q^{i-1}$ (испытания заканчиваются при первом же появлении данного события, СВ X характеризует количество совершённых попыток и имеет геометрическое распределение).

Сведём этот закон распределения ДСВ, которая принимает бесконечное и счетное количество значений, в таблицу:

X	x_i	1	2	3	...	n	...
	p_i	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	...	$p \cdot q^{n-1}$	...

Числовые характеристики геометрического распределения:

$\mathrm{M(X)} = \frac{1}{\mathrm{p}}$, $\mathrm{D(X)} = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}^2}$.

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ, если она принимает значения $x_k = k$, $k = 0, 1, 2$ ...с вероятностью $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

Числовые характеристики распределенияПуассона:

$\mathrm{M(X)} = \lambda$, $\mathrm{D(X)} = \lambda$.

Время выполнения: 60 минут.

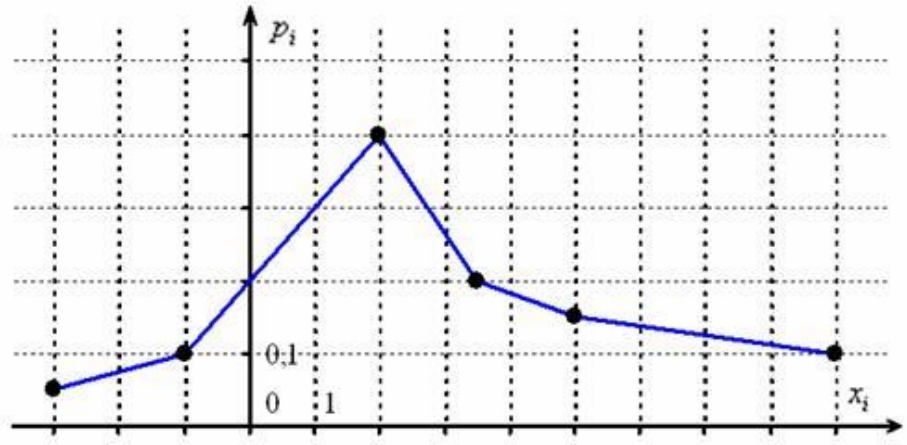
1. По условию задачи составить закон распределения ДСВ:

а) Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна $p = 0{,}7$. Составить закон распределения случайной величины X – количества попаданий после 2 выстрелов.

б) Мистер L играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание

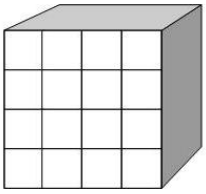
выигрыша и округлить его до копеек. Сколько в среднем проигрывает игрок с каждой поставленной сотни? (Справка: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино)

в) Дискретная случайная величина X задана своим многоугольником:



г) В магазин вошли четыре покупателя. Вероятность сделать хотя бы одну покупку для каждого равны 0,3 , 0,4 , 0,6 и 0,8 соответственно. Случайная величина X - число покупателей на кассе.

2. Для задачи № 9 из ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №2:



9. Деревянный кубик с окрашенными гранями распиливается на 64 равных кубика, из которых наугад выбирается один кубик. Какова вероятность того, что он будет содержать: $n = 64$, длина ребра исходного куба в $\sqrt[3]{64} = 4$ раз больше длины ребра маленького кубика.

1) ровно одну окрашенную грань; $m = 4 \cdot 6 = 24$ (6 граней) $P = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$;

2) ровно две окрашенные грани; $m = 2 \cdot 12 = 24$ (12 ребер) $\mathrm{P} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$;

3) ровно три окрашенные грани; $m = 2 \cdot 4 = 8$ (4 трехгранных угла) $\mathrm{P} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$;

а) Напишите закон распределения ДСВ «число окрашенных граней выбранного наугад кубика».

б) Математическое ожидание.

в) Дисперсию по формулам: $D(X) = [X - M(X)]^2 \cdot p_i$, $D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2$.

г) Для СВ $Z = X^2$, построить закон распределения, $M(Z), D(Z)$.

3. Случайная величина X_n задана законом распределения. Найдите недостающее значение вероятности, $F(X)$ и построить ее график, $M_0(X)$, $M(X)$, $D(X)$. Для дополнительного условия: $M(Z), D(Z)$.

а)

X_1	-2	-1	0	1	2
	0,11	0,25	0,13	p_4	0,2

$$Z = \sqrt{|X_1|}$$

б)

X_2	-1	1	2	4	6
	0,18	p_2	0,22	0,09	0,27

$$Z = 2^{X_2}$$

4. Составить закон распределения ДСВ и построить многоугольник распределения по данным:

а) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $M(X) = 2{,}6$, $D(X) = 0{,}44$.

б) Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. $p_1 = 0{,}4$, $M(X) = 3{,}6 D(X) = 0{,}24$.

5. Для задачи № 3 из ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ №5 составить закон распределения ДСВ:

а) $X_1 + X_2$ б) $X_1 - X_2$.

6. В билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить

график функции распределения. Найти вероятность того, что студент сдаст зачёт, если для этого нужно правильно решить не менее двух задач.

7. Для задач а) - в) составить закон распределения ДСВ, найти $M_0(X)$, $M(X)$, $D(X)$(Решить с помощью биномиального распределения):

а) Вероятность попадания в мишень равна $\frac{3}{4}$. Стрелок сделал четыре выстрела. Случайная величина X - число попаданий.

б) Для участия в олимпиаде по программированию в колледже были отобраны пять юношей и три девушки. Три победителя будут участвовать в зональной олимпиаде. X - число девушек-финалисток.

в) Предварительные данные опроса общественного мнения показали, что избирательную платформу кандидата N на выборах в мэры поддерживает 27 % избирателей этого города. Для участия в теледебатах были приглашены шесть случайных избирателей. Случайная величина X - число участников дебатов, поддерживающих данного кандидата к их началу.

8. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель при четырех выстрелах. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

9. Вероятность дозвониться до друга равна $\frac{1}{3}$. Случайная величина X - число звонков. Какова вероятность поговорить (в %), если в распоряжении пять жетонов? Составить закон распределения ДСВ, найти $M(X)$, $D(X)$. (Решить с помощью геометрического распределения):

10. Универсам осуществляет контроль чеков. Случайная величина X – число покупателей, у которого был обнаружен обвес, распределена по закону Пуассона и составляет шесть покупателей из ста. Универсам обслужил 500 покупателей. С какой вероятностью обвесы покупателей не будут выявлены? Составить закон распределения ДСВ, функцию распределения ДСВ, построить ее график.

Проверочная работа № 5

Время выполнения: 30 минут.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 4 задания.

«хорошо» - верно выполнено 3 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 2 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 2 заданий.

В-1

1. По условию задачи составить закон распределения ДСВ:

В мастерской ремонтируют три автомобиля. Вероятность того, что без приобретения запчастей отремонтируют «Mercedes-Benz» - 0,7, «Chevrolet» - 0,35, «Москвич-412» - 0,03 . Случайная величина X - число отремонтированных автомобилей.

2. Случайная величина X_n задана законом распределения. Найдите недостающее значение вероятности, $F(X)$ и построить ее график, $M_0(X)$, $M(X)$, $D(X)$. Для дополнительного условия: $M(Z), D(Z)$.

а)

X_1	3	5	7	11	12
	0,18	0,13	0,33	0,21	p_5

$$Z = {X_1}^2$$

б)

X_2	1	3	4	6	7
	0,14	0,32	p_3	0,01	0,26

$$Z = 3X_2$$

в) составить закон распределения ДСВ: $X_1 \cdot X_2$.

3. Составить закон распределения ДСВ и построить многоугольник распределения по данным:

$x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 5, M(X) = 4, D(X) = 2{,}4.$

4. Вероятность принятия отчета о выполненной работе по тендеру контрольной инстанцией равна 0,4 и не зависит от доработок в случае уже имеющегося опыта неприятия. СВ X - число попыток до принятия отчета. Найти $M(X)$ и $D(X)$ и составить закон распределения ДСВ. (Решить с помощью геометрического распределения)

В-2

1. По условию задачи составить закон распределения ДСВ:

Нужно напечатать баннер, но техника, состоящая из трех независимо работающих элементов, может подвести. Вероятность того, что сломается принтер - 0,5, компьютер - 0,05, сушильная лампа - 0,3. Случайная величина X - число отказавших элементов при печати.

2. Случайная величина X_n задана законом распределения. Найдите недостающее значение вероятности, $F(X)$ и построить ее график, $M_0(X)$, $M(X)$, $D(X)$. Для дополнительного условия: $M(Z), D(Z)$.

а)

X_1	2	4	6	8	9
	0,01	0,03	p_3	0,05	0,09

$$Z = {X_1}^3$$

б)

X_2	2	3	5	8	11
	p_1	0,13	0,13	0,13	0,13

$$Z = \frac{X_2}{2}$$

в) составить закон распределения ДСВ: $\frac{X_1}{X_2}$.

3. Составить закон распределения ДСВ и построить многоугольник распределения по данным:

Случайная величина X принимает только два значения: x_1 и x_2, причём $x_1 < x_2$. Причем, $p_1 = 0{,}8$, $M(X) = 0{,}2$, $D(X) = 5{,}76$.

4. Юный фанат таланта Лионеля Месси мечтает приобрести футболку сборной Аргентины с номером и фамилией кумира. В единственном в их городе магазине спортивной атрибутики есть только футболки Месси в составе «Барселоны», хотя каждый раз обещают, что на следующей неделе с вероятностью 10,5 % завезут искомую. X - время исполнения мечты. Найти $M(X)$ и $D(X)$ (Решить с помощью геометрического распределения).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Запись интегральной функции распределения НСВ. Равномерное распределение непрерывной случайной величины. Нормальный закон распределения. Показательно распределенные величины.

Цель: Научиться записывать интегральную функцию распределения НСВ и ее распределения.

Случайная величина ξ называется непрерывной, если ее функция распределения $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$ представима в виде $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$,для любого действительного числа x, т.е. существует функция $f_\xi(t)$, задающая локальную вероятность для малых отрезков, такая, что функция распределения представима в виде интеграла от нее. В этом случае функция $f_\xi(t)$ называется плотностью распределения НСВ.

Мода НСВ X – это значение СВ, при котором плотность вероятности максимальна. СВ может иметь несколько мод или не иметь вовсе.

Медианой НСВ X называется такое значение μ, для которого равновероятно, что СВ X больше или меньше μ: $P(X < \mu) = P(X > \mu) = \frac{1}{2}$.

Математическим ожиданием НСВ называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

В том случае, если он существует и также существует интеграл $M(|X|)$.

ДисперсиейНСВ называется интеграл

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2\, f(x) dx$$

Математическое ожидание функции от $g(X)$можно вычислить по формуле $M[g(X)] = \int g(x)\, f(x) dx$.

Используя ее, дисперсия представима в виде $D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2$.

Равномерным называется распределение таких СВ, все значения которых лежат на некотором отрезке $[a; b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке.

Плотность вероятности задается формулой: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} \text{ при } a \le x \le b; \\ 0 \text{ при } x > b \end{cases}$

Математическое ожиданиеНСВ $X \in U[a; b]$ и его медианы равны:

$$M(X) = Me(X) = \frac{b+a}{2}$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Показательным называют распределение НСВ X, которое описывается следующими функциями ФР и ПВ:

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ 1 - e^{-\lambda t} \text{при } t \ge 0, \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{при } t \ge 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Величина $T_{\frac{1}{2}}$, при которой достигается $F\left(T_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$(т.е. медиана), называется периодом полураспада. Разрешая это уравнение, получим $Me(X) = T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, тогда ФР можно представить (при $t > 0$)как $F(t) = 1 - 2^{-\frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}}$.

Математическое ожидание и дисперсия СВ, распределенной показательно с параметром λ, равны соответственно: $M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Таким образом, $\frac{1}{\lambda}$ – среднее время жизни.

Случайная величина с нормальным распределением существует на интервале $(-\infty; \infty)$ и описывается законами:

Плотность вероятности $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, где $\sigma > 0$ и m – параметры нормального распределения.

Функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Математическое ожидание и дисперсия СВ X, распределенной нормально, равны: $M(X) = m, D(X) = \sigma^2$, поэтому параметр σ – среднеквадратическое отклонение.

Случайную величину X, распределенную нормально с параметрами m и σ, обозначают $X \in N(m, \sigma^2)$.

Вероятность попадания в интервал $(\alpha; \beta)$ НСВ $X \in N(m, \sigma^2)$ можно найти с помощью функции Лапласа по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

Время выполнения: 60 минут.

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Для задач 1)-4):

а) построить график функции распределения $F(x)$;

б) найти плотность вероятности $f(x)$ и постройте ее график;

в) найти вероятность попадания в заданный интервал $(a; b)$;

г) вычислить математическое ожидание и дисперсию.

1) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \frac{x}{3} \text{ при } 0 < x \le 3; a = 1, b = 3 \\ 1 \text{ при } x > 3, \end{cases}$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \frac{x^2}{9} \text{ при } 0 < x \le 3; a = 1, b = 4; \\ 1 \text{ при } x > 3, \end{cases}$ 3) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2; \\ (x-2)^2 \text{ при } 2 < x \le 3; a = -2, b = 2{,}5; \\ 1 \text{ при } x > 3, \end{cases}$ 4) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \frac{x^2}{2} \text{ при } 0 < x \le \sqrt{2}; a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}. \\ 1 \text{ при } x > \sqrt{2}, \end{cases}$

2. НСВ X распределена равномерно на отрезке $[a; b]$. Для задач 1)-4):

а) найти функцию распределения НСВ X и построить ее график;

б) найти плотность вероятности НСВ X и построить ее график;

в) найти числовые характеристики СВ;

г) найти вероятность попадания НСВ X в интервал $(\alpha;\beta)$.

1) $a=2, b=5$ интервал $(3;5)$; 2) $a=-1, b=5$ интервал $(2;4)$;

3) $a=-2, b=2$ интервал $(1;4)$; 4) $a=0, b=7$ интервал $(4;7)$.

3. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности $f(x)$. Для задач 1)-4):

а) найти вероятность попадания НСВ X в интервал $(\alpha;\beta)$;

б) найти функцию распределения НСВ X;

в) найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$.

1) $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ 6e^{-6x} \text{ при } x\geq 0, \end{cases}$ $\alpha=0{,}23,\ \beta=0{,}32;$

2) $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ 7e^{-7x} \text{ при } x\geq 0, \end{cases}$ $\alpha=0{,}45,\ \beta=0{,}62;$

3) $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ 4e^{-4x} \text{ при } x\geq 0, \end{cases}$ $\alpha=0{,}38,\ \beta=0{,}49;$

4) $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0; \\ 5e^{-5x} \text{ при } x\geq 0, \end{cases}$ $\alpha=0{,}81,\ \beta=1{,}23.$

4. НСВ X распределена нормально. Для задач 1)-4):

а) найти функцию распределения НСВ X;

б) найти числовые характеристики;

в) найти вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha;\beta)$.

1)$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$, $\alpha=3,\ \beta=5$;2) $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$, $\alpha=2,\ \beta=4$;

3) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{8}}$, $\alpha=3,\ \beta=6$; 4) $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{50}}$, $\alpha=2,\ \beta=5$.

Проверочная работа № 6

Время на выполнение: 30 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 4 задания.

«хорошо» - верно выполнено 3 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 2 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 2 заданий.

В-1

1.Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0; \\ \frac{3x}{4} \text{ при } 0 < x \leq \frac{4}{3}; \\ 1 \text{ при } x > \frac{4}{3}, \end{cases} a = 0, b = \frac{1}{3}$$

а) построить график функции распределения $F(x)$;

б) найти плотность вероятности $f(x)$ и постройте ее график;

в) найти вероятность попадания в заданный интервал $(a; b)$;

г) вычислить математическое ожидание и дисперсию.

2. НСВ X распределена равномерно на отрезке $[a; b]$. $a = 3, b = 8$ интервал $(4; 9)$:

а) найти функцию распределения НСВ X и построить ее график;

б) найти плотность вероятности НСВ X и построить ее график;

в) найти числовые характеристики СВ;

г) найти вероятность попадания НСВ X в интервал $(\alpha; \beta)$.

3. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ 8e^{-8x} \text{ при } x \geq 0, \end{cases} \alpha = 1{,}2,\ \beta = 2{,}3.$

а) найти вероятность попадания НСВ X в интервал $(\alpha; \beta)$;

б) найти функцию распределения НСВ X;

в) найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$.

4. НСВ X распределена нормально $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6)^2}{32}}$, $\alpha = 4,\ \beta = 5$:

а) найти функцию распределения НСВ X;

б) найти числовые характеристики;

в) найти вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha; \beta)$.

В-2

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0; \\ \sin x \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 1 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}$$

а) построить график функции распределения $F(x)$;

б) найти плотность вероятности $f(x)$ и постройте ее график;

в) найти вероятность попадания в заданный интервал $(a; b)$;

г) вычислить математическое ожидание и дисперсию.

2. НСВ X распределена равномерно на отрезке $[a; b]$. $a = 5, b = 12$ интервал $(8; 10)$:

а) найти функцию распределения НСВ X и построить ее график;

б) найти плотность вероятности НСВ X и построить ее график;

в) найти числовые характеристики СВ;

г) найти вероятность попадания НСВ X в интервал $(\alpha; \beta)$.

3. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ 2^{-\frac{x}{\ln 2}} \text{ при } x \ge 0, \end{cases} \alpha = 1,\ \beta = 2.$

а) найти вероятность попадания НСВ X в интервал $(\alpha; \beta)$;

б) найти функцию распределения НСВ X;

в) найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $Me(X)$.

4. НСВ X распределена нормально $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-7)^2}{72}}$, $\alpha = 2,\ \beta = 6$:

а) найти функцию распределения НСВ X;

б) найти числовые характеристики;

в) найти вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha; \beta)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Построение графической диаграммы функции распределения для заданной выборки, расчет частот. Расчет оценок параметров распределения.

Цель: Научиться строить графические диаграммы функции распределения для заданной выборки, рассчитывать частоты и оценки параметров распределения.

График эмпирической функции распределения называют кумулятой. Для выборки, имеющей вид НСВ, для построения кумуляты точки с координатами $\left(x_i; F^*(x_i)\right)$соединяют отрезками и представляет из себя ломанную.

Разность $x_{max} - x_{min}$ между наибольшим и наименьшим значениями вариант называется размахом выборки.

Для подсчета числа интервалов удобно пользоваться эмпирической формулой Стерджесса: $k \approx 1 + 3{,}322 \lg n$.

Величину каждого интервала hможно вычислить по формуле

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322 \lg n}$$

Каждый интервал должен содержать не менее пяти вариант. В том случае, когда число вариант в интервале меньше пяти, соседние интервалы принято объединять.

Полигоном частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$ для полигона абсолютных частот и точки с координатами $(x_1; p_1^*), (x_2; p_2^*), \dots, (x_k; p_k^*)$ для полигона относительных частот.

Гистограммой абсолютных (относительных) частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых есть частичные интервалы длиной h (одинаковой для всех интервалов), а высоты равныплотности частоты - $\frac{n_i}{h}$. $\frac{p_i^*}{h}$ - плотность относительной частоты.

Для построения гистограммы необходимо найти размах выборки – ее границы, т.е. x_{max} и x_{min}, длину интервалов $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$, а также k – число интервалов.

Выборочным средним $\bar{x}_B$ называется среднее арифметическое значений исследуемого признака X выборки, а выборочной дисперсией D_B –среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от $\bar{x}_B$.

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \qquad D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2$$

Вычисление числовых характеристик выборки, состоящих изn элементов, разбитых на mсортов, в каждом j-м из которых n_jэлементов вида x_j

Характеристика	Способ задания вариационного ряда		
	Последовательностью значений	Таблицей абсолютных частот	Таблицей относительных частот
Среднее значение выборки $\bar{x}_B$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_j n_j$	$\sum_{j=1}^{m} x_j {p_j}^*$
Дисперсия выборки D_B	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2 = = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - {\bar{x}_B}^2$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \bar{x}_B\right)^2 n_j = = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} {x_j}^2 n_j - {\bar{x}_B}^2$	$\sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \bar{x}_B\right)^2 {p_j}^* = = \sum_{j=1}^{m} {x_j}^2 {p_j}^* - {\bar{x}_B}^2$

Коэффициентом вариации V называется отношение выборочного среднеквадратического отклонения к выборочному среднему: $V_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}$.

Статистической оценкой Θ^* неизвестного параметра теоретического распределения называется функция $f(x, \Theta)$от наблюдаемых случайных величин выборки.

Точечной называют статистическую оценку параметра Θ теоретического распределения, определяемую одним значением параметра $\Theta^* = f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ – результаты эмпирических наблюдений над количественным признаком X некоторой выборки.

Точечная оценка Θ^* , математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Θ , называется несмещенной. Разность $M\Theta^* - \Theta$называется смещением, или систематической ошибкой оценивания.

Состоятельной называют такую статистическую оценку Θ^* параметра, которая при $n \longrightarrow \infty$стремится по вероятности к оцениваемому параметру Θ, т.е. при увеличении объема выборки n оценка сходится по вероятности к теоретическому значению параметра Θ.

Пусть некоторая СВ X имеет $M(X) = m$, $D(X) = \sigma^2$. В ходе эксперимента случайная выборка $x_1, \dots, x_n$ из n независимых испытаний СВ X . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Среднее выборочное $\bar{x}_B$ служит несмещенной и состоятельной оценкой m

2) Если известно m , то выборочная дисперсия $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной дисперсии σ^2.

3) Если m не известно, выборочная дисперсия $D_B = \sigma_B^2$является смещенной оценкой дисперсии σ^2 . Несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии является «исправленная» дисперсия s^2 ,для получения которой необходимо умножить D_B на поправку Бесселя $\frac{n}{n-1}$. Тогда $s^2 = \frac{n}{n-1}D_B = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2$.

4) Относительная частота $p_i{}^*$ является несмещенной и состоятельной оценкой вероятности p_i . Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой теоретической функции распределения $F(x)$.

Время выполнения: 60 минут.

1.По данным выборки постройте гистограмму частот, гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию распределения и ее график – кумуляту:

1) 23,5; 26,4; 48,6; 35,8; 32,9; 41,1; 33,3; 46,3; 49,9; 34,1; 45,2; 34,5; 42,4; 47,3; 32,4; 33,3; 34,4; 30,8; 43,7; 46,9; 41,3; 34,6.

2) 50,5; 65,4; 51,6; 69,8; 65,9; 57,1; 67,3; 64,3; 54,9; 56,1; 61,2; 67,5; 64,4; 63,3; 62,4; 60,3; 69,4; 55,8; 53,7; 58,9; 57,3; 50,6.

3) 45,4; 51,4; 56,5; 47,8; 53,5; 47,2; 49,7; 48,3; 45,9; 51,3; 54,9; 54,8; 56,3; 56,4; 53,4; 53,9; 45,8; 57,4; 54,8; 48,7; 46,3; 49,6.

4) 30,8; 28,7; 36,5; 28,4; 27,5; 36,5; 34,2; 39,6; 30,8; 32,7; 28,7; 25,5; 26,1; 35,1; 38,1; 39,2; 37,0; 34,2; 36,1; 26,1; 28,9; 25,2.

2. Для задач из первого номера найдите $\bar{x}_B$, D_B, σ_B и коэффициент вариации.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите точечные несмещенные оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения:

1) $n = 41, D_B = 3$; 2) $n = 31, D_B = 5$; 3) $n = 51, D_B = 3$; 4) $n = 39, D_B = 5$.

Проверочная работа № 7

Время на выполнение: 30 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 3 задания.

«хорошо» - верно выполнено 2 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 1 задание.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 1 задания.

В-1

1.По данным выборки постройте гистограмму частот, гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию распределения и ее график – кумуляту: 82,5; 79,8; 76,9; 74,8; 84,7; 85,2; 80,9; 80,7; 76,9; 75,8; 85,7; 82,5; 82,4; 75,9; 79,6; 83,6; 89,5; 84,7; 76,9; 78,6; 79,5; 89,4.

2. Для задач из первого номера найдите $\bar{x}_B$, D_B, σ_B и коэффициент вариации.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите точечные несмещенные оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения, если $n = 41, D_B = 3$.

В-2

1.По данным выборки постройте гистограмму частот, гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию распределения и ее график – кумуляту: 98,6; 87,6; 94,7; 86,5; 85,9; 82,3; 85,6; 83,9; 89,0; 96,8; 95,8; 95,9; 94,8; 84,9; 89,5; 83,9; 86,5; 87,9; 82,0; 84,8; 95,7; 84,3.

2. Для задач из первого номера найдите $\bar{x}_B$, D_B, σ_B и коэффициент вариации.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите точечные несмещенные оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения, если $n = 41, D_B = 3$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Проверка гипотезы о нормальном законе распределения на основе критерия согласия Пирсона.

Цель: Научиться проверять гипотезу о нормальном законе распределения на основе критерия согласия Пирсона.

Критериями согласия называют критерии, в которых гипотеза определяет закон распределения либо полностью, либо с точностью до небольшого числа параметров.

Критерий Пирсона χ^2 (для простой гипотезы) – проверка гипотезы H_0о том, что эмпирическая частота n_iмало отличается от соответствующей теоретической частоты np_i. Пусть p_i – вероятность принятия значения x_i.

Для применения критерия согласия Пирсонанеобходимо:

1)вычислить значение статистики по формуле: $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$;

2) по таблице распределения Пирсона найти критические значения $\chi^2_{\alpha,k}$, где n – объем выборки, s – число различных интервалов (или вариант) группировки выборки, r – число неизвестных оцениваемых параметров предполагаемого теоретического распределения, $k = s - r - 1$ –число степеней свободы, α – выбранный уровень значимости. Строится правосторонний интервал;

3) если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\alpha,k}$, то гипотеза H_0 принимается, т.е. чем больше отклонение, тем меньше согласованы теоретическое и эмпирическое распределения. Поэтому принято использовать только правостороннюю область.

Расчетная таблица имеет вид:

Интервалы $[x_i; x_{i+1}]$	Середина i-го интервала Δ_i	Эмпирические частоты n_i	Вероят-ности p_i	Теоретические частоты np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	$(n_i - np_i)^2$

Время выполнения: 90 минут.

1.По результатам выборочного исследования найдено распределение средних удоев молока в фермерском хозяйстве (литров) от одной коровы за день:

Литры	7,5-10,5	10,5-13,5	13,5-16,5	16,5-19,5	19,5-22,5	22,5-25,5	25,5-28,5	28,5-31,5	31,5 - 34,5
Коров	2	6	10	17	33	11	9	7	5

На уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность (средний удой коров всейфермы) распределена нормально. Построить гистограмму частот и теоретическую кривую.

2. В результате проверки 500 контейнеров со стеклянными изделиями установлено, что число повреждённых изделий Xимеет следующее эмпирическое распределение:

x_i	0	1	2	3	4	5	n
n_i	270	166	49	10	3	2	500

(x_i – количество повреждённых изделий в контейнере, n_i – количество контейнеров). С помощью критерия согласия Пирсона на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина X – число повреждённых изделий распределена по закону Пуассона.

3. По таблице эмпирического распределения изменения темпа роста акций проверьте гипотезу о нормальном распределении выборки:

Показатели	Интервалы				
	$(-3;1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;3)$	Итого
m_i	7	14	18	11	50
p_i	0,14	0,28	0,36	0,22	1

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

по учебной дисциплине«Теория вероятностей и математическая статистика»

Тема: Подготовка к экзаменационной контрольной работе.

Цель: Повторить и закрепить пройденный материал по учебной дисциплине, подготовиться к написанию экзаменационной контрольной работы.

Время выполнения: 90 минут.

Вариант 0.

1. Проверьте равенство $C_{14}^{9} + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$.

2. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что:

а) сумма числа очков не превосходит $N = 12$

б) произведение числа очков не превосходит $N = 12$.

3. На складе имеется $N = 18$ кинескопов, причем $K = 12$ из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, среди $R = 6$ взятых наудачу кинескопов окажутся $L = 4$ кинескопа Львовского завода.

4. На плоскости начерчены две концентрические окружности. $r = 5$см, $R = 10$ см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.

5. Два вентилятора работают независимо друг от друга. Вероятность поломки первого вентилятора 0,1; для второго - 0,3. Найти вероятность того, что в данный момент выйдет из строя только один вентилятор.

6. Из урны, в которой находится $N = 6$ белых и $K = 4$ черных шара, извлекаются наудачу один за другим три шара. Найти вероятность того, что будет не меньше $L = 2$ шаров черного цвета.

7. Три эксперта независимо друг от друга дают правильное заключение о возможности строительства в данной местности АЭС с вероятностями $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}9$ соответственно. Найти вероятность правильного заключения хотя бы одним из экспертов (событие А).

8. Имеются 2 урны, в каждой из которых находится по 10 шаров, причем в 1-й урне 7 белых и 3 черных шара, во 2-й - 2 белых и 8 черных. Некто подходит наудачу к одной из урн и вынимает шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что он вытянут из 2-й урны.

9. Вероятность появления события А в каждом испытании равна 0,2.

а) какова вероятность того, что при 400 испытаниях событие А наступит ровно 80 раз?

б) какова вероятность того, что при 400 испытаниях событие А будет наблюдаться от 70 до 100 раз?

10. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Найти числовые характеристики (математическое ожидание, закон распределения отклонения ДСВ X от её математического ожидания, дисперсию, моду, среднее квадратическое отклонение) дискретной случайной величины X.

x	4	3	7	6
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 10 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 8-9 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 5-7 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 5 заданий.

ЛИТЕРАТУРА

а) основная

1. Спирина, М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. - М.: Издательский центр Академия, 2007. - 352 с.

2. Спирина, М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Сборник задач: учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. - М.: Издательский центр Академия, 2014. - 192 с.

3. Машовец Л.В., Теория вероятностей и математическая статистика, методические указания для заочного обучения, ВМРК, 2015 г.

б) дополнительная

4. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для СПО / В.Е. Гмурман. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 479 с.

Интернет-ресурсы:

5. Электронная версия конспекта лекций

6. Электронный ресурс «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». Форма доступа: http://window.edu.ru

7. Электронный ресурс «Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов». Форма доступа: http://fcior.edu.ru

Электронный ресурс «Основы теории вероятностей» Форма доступа: http://www.intuit.ru/department/mathematics/basetpr/