ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО РЫБОЛОВСТВУ

«Владивостокский морской рыбопромышленный колледж»

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования

«Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет»

(«ВМРК» ФГБОУ ВО «Дальрыбвтуз»)

ЕН. 01ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для специальности

09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Владивосток

2020

ОДОБРЕНЫ
Цикловой комиссией
естественнонаучных и
математических дисциплин
Председатель:
_____ С.И. Сухомлинова
Протокол № 6 от 11.02.2020 г.

Автор: преподаватель Владивостокского морского
рыбопромышленного колледжа _____ С.В. Волошина
подпись

Методические указания по проведению практических работ составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины Элементы высшей математики, утвержденной зам. начальника колледжа по УВР 31.08.18г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ 5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 7
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 12
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 14
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4 18
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 20
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 23
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7 28
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8 32
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9 36
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10 38
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11 48
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12 49
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13 54
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14 58
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15 70
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16 72
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №17 83
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18 84
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19 88
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №20 94
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №21 95
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №22 106
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №23 110
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №24 111
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №25 113
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №26 119
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №27 120

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №28 125
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №29 129
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №30 134
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №31 135
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №32 137
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №33 138
ЛИТЕРАТУРА 139

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№	Название
1	Практическая работа № 1 Выполнение операций над матрицами.
2	Практическая работа № 2 Определители 2 и 3 порядка. Свойства определителей.
3	Практическая работа № 3 Нахождение обратной матрицы.
4	Практическая работа № 4 Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
5	Практическая работа № 5 Проверочная работа по теме: «Элементы линейной алгебры».
6	Практическая работа № 6 Действия над векторами, заданными координатами.
7	Практическая работа № 7 Уравнение прямой с угловым коэффициентом, "в отрезках" и общее уравнение прямой.
8	Практическая работа № 8 Составление уравнений окружности, гиперболы, эллипса.
9	Практическая работа № 9 Проверочная работа по теме: «Элементы аналитической геометрии».
10	Практическая работа № 10 Построение графиков элементарных функций, вычисление пределов.
11	Практическая работа № 11 Проверочная работа по теме:«Предел функции».
12	Практическая работа № 12 Вычисление производных, составление уравнений касательной и нормали к графику функции.
13	Практическая работа № 13 Применение дифференциала в приближенных вычислениях, вычисление пределов с помощью теоремы Лопиталя.
14	Практическая работа № 14 Построение графиков с помощью производной.
15	Практическая работа № 15 Проверочная работа по теме: «Производная и дифференциал».
16	Практическая работа № 16 Вычисление неопределенных интегралов.
17	Практическая работа № 17Проверочная работа по теме: «Интегралы».
18	Практическая работа № 18 Решение линейных дифференциальных уравнений 1 порядка.
19	Практическая работа № 19 Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
20	Практическая работа № 20 Проверочная работа по теме: «Дифференциальные уравнения».
21	Практическая работа № 21 Экстремумы функций нескольких переменных.
22	Практическая работа № 22 Задача о наибольшем и наименьшем значениях.
23	Практическая работа № 23 Проверочная работа по теме: «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».
24	Практическая работа № 24 Действия с комплексными числами, решение

	квадратных уравнений.
25	Практическая работа № 25 Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.
26	Практическая работа № 26 Проверочная работа по теме: «Комплексные числа».
27	Практическая работа № 27 Нахождение суммы ряда.
28	Практическая работа № 28 Сходимость числовых положительных рядов.
29	Практическая работа № 29 Признаки сходимости Даламбера и Коши.
30	Практическая работа № 30 Признак Лейбница.
31	Практическая работа № 31 Сходимость знакочередующихся рядов.
32	Практическая работа № 32 Проверочная работа по теме: «Ряды».
33	Практическая работа № 33 Подготовка к экзамену.

Порядок оформления:

Работа оформляется в отдельной тетради в соответствии с требованиями, предъявляемыми к практическим работам.

Работы должны быть написаны аккуратно (разборчивый почерк, оставление полей, записаны полностью условия заданий и т.п.). Приступать к выполнению практической работы следует только после проработки теоретического материала на занятиях, по материалам конспектов и учебника «Элементы высшей математики» под редакцией Григорьев С.Г., Иволгина С.В.

Практическая работа выполняется всеми учащимися, и правильность решения проверяется на доске. В каждую из практических работ входит проверочная работа, которая выполняется индивидуально каждым студентом и оценивается преподавателем.

Критерии оценки выполнения проверочных работ:

«5»-Работа должна быть выполнена правильно и в полном объёме, 90-100% выполнения.

«4»-Работа выполнена правильно, но имеются недочеты, процент выполнения 75-89%.

«3»- Работа выполнена правильно, но имеются ошибки, процент выполнения 50-74%.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Выполнение операций над матрицами.

Цель: Научиться выполнять операции над матрицами.

Матрицейразмером $m\times n$ называется совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и nстолбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \underset{1\times 1}{(4)}$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B. В общем виде матрицу размером $m\times n$записывают так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23}– элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Виды матриц:

1) Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, причём число ее строк или столбцов называется порядкомматрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются первая матрица – её порядок равен 3, и третья матрица – её порядок 1.

2) Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется прямоугольной. В примерах это вторая матрица.

3) Матрица, у которой всего одна строка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, называется строкой (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец – столбцом.

5) Главной диагональюквадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол. Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется треугольнойматрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

6) Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется диагональнойматрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7) Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется единичной матрицей и обозначается буквой Е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами:

Равенство матриц. Две матрицы *A* и *B*называются

равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. *A*=*B*, если $a_{11} = b_{11}$,$a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

1) Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу *A* из *m* строк и *n* столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу *B* из *n* строк и *m* столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы *A* с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы *A* с тем же номером). Эту матрицу *B* называют транспонированной матрицей *A*, а переход от *A* к *B* транспонированием. Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицу, транспонированную к матрице *A*, обычно обозначают A^T. Связь между матрицей *A*и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Примеры:Найти матрицу транспонированную данной:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Сложение матриц. Пусть матрицы *A* и *B*состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B* нужно к элементам матрицы *A*прибавить

элементы матрицы B, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц A и B называется матрица C, которая определяется по правилу:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$ или

$(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$.

Свойства:

1. коммутативное $A+B=B+A$.

2. ассоциативное $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. для любой матрицы A найдется единственная матрица B такая, что$A+B=0$.

4. $A+0=A$.

Примеры.Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.

3) Умножение матрицы на число.Для того чтобы умножить матрицу A на число kнужно каждый элемент матрицыAумножить на это число. Таким образом, произведение матрицыA на число kесть новая матрица, которая определяется по правилу:

$$kA=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$$ или $(c_{ij})=(ka_{ij})$.

Для любых чисел a и b и матриц Aи Bвыполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

2. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta B$.

Пример: Выполнить умножение матрицы на число:

$$-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Пример: Найти 2А-В.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}\quad 2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

4) Умножение матриц. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы. Произведением матрицы A на матрицу B называется новая матрица $C = AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{pmatrix}.$$

Свойства:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2) ассоциативное и дистрибутивное $(AB)C = A(BC)$ и $(A + B)C = AC + BC$.

3) $AE = EA = A$.

Примеры: Вычислите произведение матриц:

1. $$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2 & 4+1\\ 3+2+2 & 6+1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+2 & -3-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7\end{pmatrix}$$

3. Найти AB и BA, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

$AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B{\cdot}A$ – нельзя, т.к. количество столбцов первой матрицы не равно количеству строк второй матрицы.

Время выполнения: 90 минут.

1. Найти сумму матриц $A + B$: 1) $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -4 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -8\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -4\end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -9 & -2 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение данных матриц на соответствующие им числа:

1) $\alpha = 2,\ A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ 2) $\alpha = -3,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\alpha = -5$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Найти следующие матрицы: 1)$A = \begin{pmatrix} 13 & 31 & -9 \\ -21 & 14 & 0 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 10 & 23 & -6 \\ 19 & -1 & 17 \end{pmatrix}$, $C = A - B$ 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -8 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = A - B$ 3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = 3A - 2B$ 4) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -8 \\ 3 & -9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $D = 2A - 4B + 5C$ 5)$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \sum_{k=1}^{4} A_k$.

4. Найдите произведение $A \cdot B$ следующих матриц: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, 3) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$5) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$7) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Определители 2 и 3 порядка. Свойства определителей.

Цель: Научиться находить определители матриц.

Определителем 2-ого порядка называется число, связанное с квадратной матрицей второго порядка $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ следующей формулой:

$|\mathrm{A}| = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$.

Пример: Вычислить определитель матрицы: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$|\mathrm{A}| = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 11$$

Определителем 3-его порядка называется число, связанное с квадратной матрицей третьего порядка $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ следующей формулой:

$$|\mathrm{A}| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

Пример: Вычислить определитель: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

$$|\mathrm{A}| = 5 \cdot (-3) \cdot 7 + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot (-3) \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 8 \cdot (-2) =$$
$$= -105 - 4 + 96 + 9 - 56 + 80 = 20$$

Определитель n-ого порядка (n>3) осуществляется с использованием свойств определителя:

1) определитель не меняется, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную (умноженный) на любое число.

2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

3) если строку (столбец) умножить на какое-либо число, то определитель умножится на это число.

4) определитель матрицы не меняется при транспонировании.

5) если в матрице определителя содержится две одинаковые строки (столбца), то определитель = 0

6) если в матрице содержится строка (столбец), состоящая из одних нулей, то определитель = 0

Три способа вычисления определителя n-ого порядка:

- через сумму произведений сочетаний элементов матрицы;

- через разложение определителя по элементам строки или столбца матрицы;

- методом приведения матрицы к верхней треугольной (методом Гаусса).

Метод Гаусса:

1) Матрица А с помощью элементарных преобразований приводится к такому виду, чтобы в первом столбце все элементы, кроме a_{11} стали нулевыми. Нулевые элементы получаются для того, чтобы получить самое простое разложение определителя по элементам первого столбца.

2) После такого преобразования матрицы А, получим: $|\mathrm{A}| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot$ $\cdot M_{11} = a_{11} \cdot M_{11}$, где M_{11} – минор (n-1)-ого порядка, получающийся из матрицы А вычеркиванием элементов ее первой строки и первого столбца. С матрицей, которой соответствует минор M_{11}, выполняется такая же процедура получения нулевых элементов в первом столбце. И так далее до окончательного вычисления определителя.

Замечание: При получении минора 3 порядка для упрощения можно воспользоваться формулой: $|\mathrm{A}| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh.$

Пример: Вычислить определитель матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & 4 & 21 \\ 4 & -4 & 8 & 27 \end{pmatrix}$.

С помощью элементарных преобразований (сложения и вычитания строк матрицы) приводится к такому виду, чтобы в первом столбце все элементы, кроме $a_{11} = 1$ стали нулевыми. Для этого: из второй строки вычитаем первую; из второй строки вычитаем первую, умноженную на 3; из третьей строки вычитаем первую, умноженную на 4. Получим:

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1-1 & 5-(-1) & 5-0 & -8-5 \\ 3-1\cdot 3 & -3-(-1)\cdot 3 & 4-0\cdot 3 & 21-5\cdot 3 \\ 4-1\cdot 4 & -4-(-1)\cdot 4 & 8-0\cdot 4 & 27-5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

После такого преобразования матрицы А вычеркиваем элементы первой строки и первого столбца (по формуле $|\mathrm{A}| = a_{11} \cdot M_{11}$), получим:

$$|A| = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Это минор третьего порядка, его определитель можно найти с помощью формулы: $|\mathrm{A}| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$: $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 6\cdot 4\cdot 1 + (-13)\cdot 0\cdot 4 + 0\cdot 5\cdot 6 - (-13)\cdot 4\cdot 0 - 6\cdot 6\cdot 4 - 1\cdot 0\cdot 5 = -120$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Вычислите определители $|A|$ матриц: 1) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ 7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 27 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 13) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Нахождение обратной матрицы.

Цель: Научиться находить обратную матрицу методом алгебраических дополнений.

Нахождение обратной матрицы.

Понятие обратной матрицы вводится лишь для квадратных матриц, определитель которых отличен от нуля, то есть для невырожденных квадратных матриц.

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,n$, определитель которой отличен от нуля $|A| \neq 0$, если справедливы равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n на n.

Методы нахождения обратной матрицы:

1) Нахождение обратной матрицы с помощью матрицы из алгебраических дополнений.

2) Нахождение обратной матрицы методом Гаусса – Жордана.

3) Нахождение элементов обратной матрицы с помощью решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений.

Составим алгоритм нахождения обратной матрицы с использованием равенства: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T$.

1. Вычисляем определитель матрицы A и убеждаемся, что он отличен от нуля (в противном случае матрица A необратима).

2. Строим $\|A_{ij}\|$- матрицу из алгебраических дополнений элементов a_{ij}.

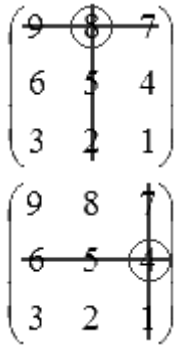
Минор k-ого порядка матрицы A порядка m на n – это определитель матрицы порядка k на k, которая получается из элементов матрицы A, находящихся в выбранных k строках и k столбцах (k не превосходит наименьшего из чисел m или n). Минор (n-1)-ого порядка, который составляется из элементов всех строк, кроме i-ой, и всех столбцов, кроме j-ого, квадратной матрицы A порядка n на n обозначим как M_{ij}. Иными словами, минор M_{ij} получается из квадратной матрицы A порядка n на n вычеркиванием элементов i-ой строки и j-ого столбца.

Пример: запишем, минор 2-ого порядка, который получается из матрицы A вычеркиванием первой строки и второго столбца: $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6$. Покажем

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

минор, который получается из матрицыАвычеркиванием второй строки и третьего столбца:

$M_{23} = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = -6$. Проиллюстрируем построение этих миноров.



Алгебраическим дополнениемэлемента a_{ij} квадратной матрицы$A = \|a_{ij}\|$, $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, n$,называют минор

(n-1)-ого порядка, который получается из матрицыА, вычеркиванием элементов еei-ой строки и j-ого столбца, умноженный на$(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элементаa_{ij}обозначается какA_{ij}. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример: Найти A_{12}-?

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 \cdot 1 - 4 \cdot 3) = 6$$

Транспонируем матрицу$\|A_{ij}\|$, тем самым получаем$\|A_{ij}\|^T$.

Умножаем каждый элемент матрицы$\|A_{ij}\|^T$ на число$\frac{1}{|A|}$. Этой операцией завершается нахождение обратной матрицыA^{-1}.

Пример: Дана матрица $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

Вычислим определитель третьего порядка матрицы А по формуле:

$$|\mathrm{A}| = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

$$|\mathrm{A}| = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot (-2) =$$
$$= 16$$

Определитель отличен от нуля, так что матрицаА обратима. Найдем матрицу из алгебраических дополнений: $\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 3) = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-2 \cdot 0 - 2 \cdot 0) = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-2 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (4 \cdot 0 - (-2) \cdot 3) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot \big(3 \cdot 0 - 2 \cdot (-2)\big) = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 0 - (-2) \cdot 1) = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \big(3 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2)\big) = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4) = 11$$

Составляем матрицу: $\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

Транспонируем ее: $\|A_{ij}\|^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ -6 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

Теперь, подставляя в формулу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T$ полученные данные, находим обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|A_{ij}\|^T = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot (-6) & \frac{1}{16} \cdot 2 \\ \frac{1}{16} \cdot 0 & \frac{1}{16} \cdot 4 & \frac{1}{16} \cdot 4 \\ \frac{1}{16} \cdot (-8) & \frac{1}{16} \cdot (-1) & \frac{1}{16} \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Найдите обратные матрицы A^{-1} для матриц: 1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ 5) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 11 & 10 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: Научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений.

Замечание: Число уравнений должно быть равно числу неизвестных.

Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

Пусть нам требуется решить систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где x_1, x_2, …, x_n – неизвестные переменные, a_{ij}, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,n$ – числовые коэффициенты, b_1, b_2, …, b_n- свободные члены.

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы и убеждаемся, что он отличен от нуля.

2. Находим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ b_2 + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ b_n + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_1 + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + b_2 + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1} + b_n + \cdots + a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + b_n \end{vmatrix}$$

которые являются определителями матриц, полученных из матрицыАзаменой k-ого столбца (k = 1, 2, …, n) на столбец свободных членов.

3. Вычисляем искомые неизвестные переменные x_1, x_2, …, x_nпо формулам:

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, … , $x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Определим матрицу системы (выпишем коэффициенты при переменных):

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 1 \\ 3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель основной матрицы системы по формуле: $|A| = aek + +bfg + cdh - ceg - bdk - afh$ и убеждаемся, что он отличен от нуля:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -7$$

Находим остальные определители (полученные заменой столбцов основной матрицы на столбец свободных членов), которые помогут нам найти корни системы уравнений:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -7$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -14$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -21$$

Вычисляем искомые неизвестные переменные x_1, x_2, x_3по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-21}{-7} = 3$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Решить системы методом Крамера: 1) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 14 \\ 3x - 4y + 2z = -25 \\ 7x - 6y + 4z = -43 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8x - 2y - 6z = 32 \\ 6x - 4y + 3z = -21 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x - 6y - 4z = -54 \\ 4x - 2y - 3z = -28 \\ 4x + 4y + z = 30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10x - 8y + z = -59 \\ -5x + 4y + 2z = 17 \\ x + 7y - 3z = 33 \end{cases}$ 5)

$\begin{cases} 2y + x + z = -1 \\ -z - y + 3x = -1 \\ -2x + 3z + 2y = 5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \frac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Элементы линейной алгебры».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Элементы линейной алгебры».

Проверочная работа № 1 по теме: «Элементы линейной алгебры».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 9-10 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 7-8 заданий.

«удовлетворительно» - верно выполнено 5-6 заданий.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 5 заданий.

В-1

1. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -1 & 8 & -3 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} 4 \end{Vmatrix}$
2. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \\ 7 & -8 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} 2 \end{Vmatrix}$
3. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -9 \end{Vmatrix} \times (-3)$	A) $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 27 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 27 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -9 & -3 \\ 2 & -9 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} -9 & -3 \\ -6 & 27 \end{Vmatrix}$
4. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -35 & -30 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -8 & -4 \\ -6 & -5 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -45 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} 2 & -12 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \end{Vmatrix}$
5. Найти значение детерминанта 2-ого порядка $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$	A) 3 B) -3 C) 90 D) 1
6. Найти значение детерминанта 3-ого порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	A) 46 B) -46 C) 0 D) 8
7. Найти значение детерминанта 4-ого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$	A) 8 B) 0 C) -3 D) 3
8. Найти матрицу обратную к данной $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 9 & 7 & -10 \\ 6 & 5 & -7 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$
9. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера $\begin{cases} 8x - 2y - 6z = 32 \\ 6x - 4y + 3z = -21 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$	A) $(1, 3, -5)$ B) $(-1, -3, 5)$ C) $(1, -3, 5)$ D) $(-1, 3, 5)$
10. Найти решение матричного уравнения $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \times X =$	A) $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$ C) 2 D) $\begin{Vmatrix} 2 \end{Vmatrix}$

$= \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$	

В-2

1. $\begin{Vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 9 & -7 & 6 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -8 & 10 & 7 \\ 6 & -1 & -3 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} 10 \\ 3 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -9 & 15 & 10 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -9 & 15 & 10 \\ 15 & -8 & 3 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} 9 \end{Vmatrix}$
2. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 3 & 8 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 11 \\ 9 & 6 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} -6 & 9 \\ 4 & 7 \\ 12 & 14 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -15 \\ -6 & 2 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -5 \\ -15 \\ 2 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} -5 \end{Vmatrix}$
3. $\begin{Vmatrix} -6 & -7 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix} \times (-2)$	A) $\begin{Vmatrix} 12 & -7 \\ -16 & 5 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -6 & 14 \\ 8 & -10 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} 12 & 14 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} 12 & 14 \\ -16 & -10 \end{Vmatrix}$
4. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 9 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -6 & -7 \\ 2 & 0 \\ 4 & 9 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} -34 & -86 \\ -44 & -36 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} -12 & -32 \\ -63 & 27 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -15 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} -12 & 10 & -32 \\ -63 & 0 & 27 \end{Vmatrix}$
5. Найти значение детерминанта 2-ого порядка $\begin{vmatrix} -11 & -9 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$	A) -6 B) 6 C) 138 D) -138
6. Найти значение детерминанта 3-ого порядка $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	A) 14 B) -104 C) 322 D) -322
7. Найти значение детерминанта 4-ого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 5 & 6 \end{vmatrix}$	A) 148 B) 144 C) -260 D) -304
8. Найти матрицу обратную к данной $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{Vmatrix}$ C) $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{Vmatrix}$ D) $\begin{Vmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{Vmatrix}$
9. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$	A) $(-5, 1, -1)$ B) $(-1, 1, 5)$ C) $(5, -1, 1)$ D) $(1, -1, -5)$
10. Найти решение матричного уравнения $\begin{Vmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{Vmatrix} \times X = \begin{Vmatrix} -18 & 9 & 6 \\ 3 & 15 & 21 \\ 12 & -3 & 27 \end{Vmatrix}$	A) $\begin{Vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$ B) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$ C) 3 D) $\begin{Vmatrix} 3 \end{Vmatrix}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Действия над векторами, заданными координатами.

Цель: Научиться выполнять операции над векторами, находить длину вектора, орт вектора, скалярное произведение и угол между векторами и прямыми, определять коллинеарность, компланарность, ортогональность векторов.

Геометрические векторы и действия над ними.

Линейные операции над векторами:

1) Сложение, вычитание, умножение на число, разложение по базисным векторам: $\vec{a} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$.

Пример: Выполните линейные операции с данными векторами: $3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}\{3;\ -1;\ -4\}$, $\vec{b}\{-3;\ -7;\ 1\}$.

Чтобы найти вектор $3\vec{a}$ нужно координаты вектора $\vec{a}$ умножить на 3, получим: $3\vec{a}\{3 \cdot 3;\ 3 \cdot (-1);\ 3 \cdot (-4)\}$, $3\vec{a}\{9;\ -3;\ -12\}$. Чтобы найти вектор $2\vec{b}$ нужно координаты вектора $\vec{b}$ умножить на 2: $2\vec{b}\{2 \cdot (-3);\ 2 \cdot (-7);\ 2 \cdot 1\}$, $2\vec{b}\{-6;\ -14;\ 2\}$. Теперь найдем разность полученных векторов и получим ответ: $3\vec{a} - 2\vec{b}\{9 - (-6);\ -3 - (-14);\ -12 - 2\}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}\{15;\ 11;\ -14\}$.

2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и выполняется условие: $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Пример: Докажите, что векторы $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $2\vec{c} - 5\vec{d}$ коллинеарны, если $\vec{a}\{1;\ 5;\ -3\}$, $\vec{b}\{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{c}\{2;\ 1;\ 10\}$, $\vec{d}\{-2;\ 2;\ 4\}$.

Найдем вектора $3\vec{b}$, $2\vec{c}$ и $5\vec{d}$, для этого координаты векторов умножаем на константы перед ними, получим: $3\vec{b}\{3 \cdot 2;\ 3 \cdot (-3);\ 3 \cdot 1\}$, $3\vec{b}\{6;\ -9;\ 3\}$, $2\vec{c}\{2 \cdot 2;\ 2 \cdot 1;\ 2 \cdot 10\}$, $2\vec{c}\{4;\ 2;\ 20\}$, $5\vec{d}\{5 \cdot (-2);\ 5 \cdot 2;\ 5 \cdot 4\}$, $5\vec{d}\{-10;\ 10;\ 20\}$.

Теперь найдем вектора $\vec{a}+3\vec{b}\{1+6;\ 5+(-9);\ -3+3\}$, $\vec{a}+3\vec{b}\{7;\ -4;\ 0\}$ и $2\vec{c}-5\vec{d}\{4-(-10);\ 2-10;\ 20-20\}$, $2\vec{c}-5\vec{d}\{14;\ -8;\ 0\}$.

Проверим выполнение условия: $\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}$

$$\frac{7}{14}=\frac{-4}{-8}=\frac{0}{0}$$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{0}{0}$. Условие выполнено (напомним, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору), следовательно, вектора $\vec{a}+3\vec{b}$ и $2\vec{c}-5\vec{d}$ коллинеарны.

3) Система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется линейно зависимыми или компланарными, т.е. лежащими в одной плоскости, если выполняется условие: $\Delta=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}=0$.Если условие не выполнятся, то система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется линейно независимыми и образуют базис.

Пример: Докажите, что вектора $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{a}\{4;\ 0;\ 6\}$, $\vec{b}\{0;\ 4;\ 3\}$, $\vec{c}\{-1;\ 2;\ 0\}$.

Проверим выполнение условия: $\Delta=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}=0$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4\cdot4\cdot0+6\cdot0\cdot2+(-1)\cdot0\cdot3-6\cdot4\cdot(-1)-4\cdot2\cdot3-0\cdot0\cdot$$

$$\cdot0=24-24=0$$

Условие выполнено, следовательно, вектора $\vec{a}$,$\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

4) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, если приведенные к общему началу они образуют прямой угол и выполняется условие $x_ax_b+y_ay_b+z_az_b=0$. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Пример: Докажите, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ ортогональны, если $\vec{a}\{2;\ -4;\ 2\}$, $\vec{b}\{6;\ 5;\ 4\}$.

Проверим выполнение условия: $x_ax_b+y_ay_b+z_az_b=0$.

$$2\cdot6+(-4)\cdot5+2\cdot4=0$$

$$12 - 20 + 8 = 0$$

$0 = 0$. Условие выполнено, следовательно, вектора$\vec{a}$,$\vec{b}$ортогональны.

Векторная алгебра:

Скалярным произведением двух векторов называетсячисло, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$\vec{a}\cdot\vec{b}$= $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$.Если векторы заданы через соответствующие им координаты $\vec{a}\{x_a; y_a; z_a\}$, $\vec{b}\{x_b; y_b; z_b\}$, то скалярное произведение выражается через формулу: $\vec{a}\cdot\vec{b}$=$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$. Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между векторами острый, отрицательное число - тупой, равно нулю - прямой.

Пример: Найти скалярное произведение векторов, если

$|\vec{a}\,| = 2, \left|\vec{b}\right| = 6, \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \pi$. Подставим в формулу данные условия, получим: $\vec{a}\cdot\vec{b}$= $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = 2\cdot 6\cdot\cos\pi = 12\cdot(-1) = -12$. Для нахождения значения $\cos\pi$ воспользовались таблицей значений углов тригонометрических функций:

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\boldsymbol{\alpha}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Пример: Найти скалярное произведение векторов и определить вид угла (прямой, острый или тупой), если $\vec{a}\{3;\ 2;\ -1\}$, $\vec{b}\{5;\ -6;\ -4\}$.Подставим в формулу данные условия, получим:

$\vec{a}\cdot\vec{b}$=$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 3\cdot 5 + 2\cdot(-6) + (-1)\cdot(-4) = 15 - 12 + 4 = 7.$

Так как скалярное произведение векторов — положительное число ($7 > 0$), то угол между векторами острый.

2) Угол между векторами находится по формуле:

$$\cos(\vec{a}\hat{}\,\vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Пример: Найти угол между векторами, если $\vec{a}\{-2;\ -7;\ 3\}$, $\vec{b}\{1;\ 19;\ 14\}$.

Подставим в формулу данные условия, получим:

$$\cos(\vec{a}\hat{}\,\vec{b}) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 1 + (-7) \cdot 19 + 3 \cdot 14}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 19^2 + 14^2}} = \frac{-2 - 133 + 42}{\sqrt{4 + 49 + 9} \cdot \sqrt{1 + 361 + 196}} =$$

$$= -\frac{93}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{558}} = -\frac{93}{\sqrt{34596}} = -\frac{93}{186} = -\frac{1}{2}$$

Решим тригонометрическое уравнение $\cos(\vec{a}\hat{}\,\vec{b}) = -\frac{1}{2}$.

Воспользуемся таблицей значений углов тригонометрических функций и найдем $\cos(\vec{a}\hat{}\,\vec{b}) = -\frac{1}{2}$ (см. выше). Из нее $(\vec{a}\hat{}\,\vec{b}) = 120^0$

3) Длина вектора находится по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

Пример: Найти длину вектора, если $\vec{a}\{4;\ -3;\ 12\}$. Подставим в формулу данные условия, получим:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

4) Орт вектора $\vec{a}$ (обозначается e_a)—это вектор коллинеарный и сонаправленный с вектором $\vec{a}$, длина которого равна 1. Орт вектора находится по формуле: $e_a = \vec{a} \cdot \frac{1}{|a|}$.

Пример: Найти орт вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}\{2;\ -3;\ 6\}$. Чтобы найти орт вектора, вычислим его длину:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Подставим в формулу полученные данные, получим:

$$e_a = \vec{a} \cdot \frac{1}{|a|} = \{2;\ -3;\ 6\} \cdot \frac{1}{7} = \left\{\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7};\ \frac{6}{7}\right\}$$

Системы координат.

Системой координат на прямой называется совокупность точки О – начала координат и единичного базисного вектора $\vec{e}$, коллинеарного данной прямой.

Декартовой системой координат на плоскости называется совокупность точки О – начала координат и двух базисных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ неколлинеарны).

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки О – начала координат и трех базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ - некомпланарны).

	Координаты на прямой	Координаты на плоскости	Координаты в пространстве
Название	Числовая ось	Прямоугольная декартовая система координат	Прямоугольная декартовая система координат
Способ задания системы координат	(·) О - начало координат $\vec{e}$ – базисный вектор	(·) О - начало координат $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$- базисные векторы	(·) О - начало координат $\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$- базисные векторы
Координаты $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A\}$	$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A\}$	$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_A - Z_B\}$
Длина$\overrightarrow{AB}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert x_B - x_A\rvert$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + +(z_B - z_A)^2}$
Координаты серединной точки отрезка	$C\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)$	$C\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$	$C\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Время выполнения: 90 минут.

1. Выполнить линейные операции с векторами: 1) найдите векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = \{5; 2; -3\}$, $\vec{b} = \{1; -4; 5\}$ 2) найдите векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 7\vec{a}$,$\vec{e} = 2\vec{b}$,$\vec{f} = -3\vec{c}$,если$\vec{a} = \{-3; 1; 8\}$,$\vec{b} = \{4; -2; 1\}$ 4) найдите векторы $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$,если $\vec{a} = \{1; 3; -5\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -3\}$ 3) покажите, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, если $\vec{a} = \{5; 7; -2\}$, $\vec{b} = \{-3; -5; -2\}$, $\vec{c} = \{-2; -2; 4\}$.

2. Покажите, что векторы $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и $5\vec{c} + 4\vec{d}$ коллинеарны, если $\vec{a} = \{3; -2; -4\}$, $\vec{b} = \{-1; 3; 1\}$, $\vec{c} = \{2; -4; -4\}$, $\vec{d} = \{3; -1; -2\}$.

3. Покажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если $\vec{a} = \{-3; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 9; 12\}$, $\vec{c} = \{7; 1; 8\}$.

4. Покажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, если $\vec{a} = \{5; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{-1; 9; 11\}$.

5. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$3) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

6. Выясните, острый, прямой или тупой угол образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a} = \{5; -3; 1\}$, $\vec{b} = \{5; 6; -4\}$ 2) $\vec{a} = \{-2; 3; 6\}$, $\vec{b} = \{3; 9; -4\}$.

7. Найти угол, который образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: $\vec{a} = \{6; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{9; 1; 4\}$.

8. Найдите длину и орт вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} = \{0; 3; 4\}$.

9. Найдите координаты вектора$\overrightarrow{AB}$ и его длину $|\overrightarrow{AB}|$, если: 1) $A(5)$, $B(3)$2) $A(-7)$, $B(8)$3) $A(2,5)$, $B(4,2)$4) $A(1,-3,2)$, $B(5,-1,7)$.

10. Найдите координаты вектора 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PQ}$, $A(-5)$, $B(-8)$, $P(4)$, $Q(9)$2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $A(1,-4)$, $B(5, 2)$, $C(-3,7)$, $D(2,9)$ 3) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$, $A(-3,1)$, $B(-2, 4)$, $C(-4,2)$, $D(1,3)$ 4) $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$, $A(3,6,5)$, $B(5,7,2)$, $C(-1,5,-2)$, $D(-3,6,2)$.

11. Найдите координаты точки С-середины отрезка АВ, если: 1) $A(1)$, $B(15)$ 2) $A(3,2)$, $B(7,6)$ 3) $A(-7,2,9)$ и $B(5,-6,1)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Уравнение прямой с угловым коэффициентом, "в отрезках" и общее уравнение прямой.

Цель: Научиться решать задачи, используя уравнения прямых на плоскости, заданных разными способами.

Уравнение прямой на плоскости.

1) Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$.

$\vec{n} = \{A; B\}$ перпендикулярный к прямой $Ax + By + C = 0$ называется нормальным вектором.

$\vec{l} = \{-B; A\}$ направленный вдоль прямой $Ax + By + C = 0$ называется направляющим вектором.

Угол между двумя прямыми равен углу между нормальными векторами. Если прямые a и b перпендикулярны, то $\vec{n}_a = \vec{l}_b$.

Пример: Через точку $P(-2, 5)$проходит прямая, перпендикулярная прямой, заданной уравнением $5x - y - 11 = 0$. Запишите уравнение этой прямой.

Обозначим через $\vec{n}_a$ и $\vec{l}_a$ перпендикулярный и направляющий вектора для прямой $5x - y - 11 = 0$, а через $\vec{n}_b$ и $\vec{l}_b$ перпендикулярный и направляющий вектора искомой прямой.

Для прямой $5x - y - 11 = 0$ определим коэффициенты A, B и C с помощью общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, получим: $A = 5, B = -1, C = -11$, тогда перпендикулярный и направляющий вектора для данной прямой имеют координаты: $\vec{n}_a = \{A; B\} = \{5; -1\}$и $\vec{l}_a = \{-B; A\} = \{1; 5\}$.

Чтобы написать уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x - y - -11 = 0$, воспользуемся правилом: если прямые a и b перпендикулярны, то $\vec{n}_a = \vec{l}_b$, значит $\vec{l}_b = \{-B; A\} = \{5; -1\}$. Из этого следует, что коэффициенты A и B искомой прямой равны: $A = -1, B = -5$. Чтобы найти коэффициент C, подставим в общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициенты A и B и координаты точки $P(-2, 5)$, получим: $-1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 5 + C = 0$. Решим данное уравнение:

$$2 - 25 + C = 0$$

$$-23 + C = 0$$

$$C = 23$$

Уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x - y - 11 = 0$, будет иметь вид: $-1 \cdot x + (-5) \cdot y + 23 = 0$, для получения положительного коэффициента при x, умножим данное уравнение на -1 и получим ответ: $x + 5y - 23 = 0$.

2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где k- угловой коэффициент прямой, а b – длина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

Если на прямой а взяты точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Если прямые а и b параллельны, то $k_1 = k_2$.

Если прямые а и b перпендикулярны $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Если прямые а и b пересекаются, то $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Пример: Определить k и b для прямой $2x - y + 3 = 0$. Чтобы определить коэффициенты k и b, нужно из данного уравнения выразить y, получим:

$$-y = -2x - 3$$

$$y = 2x + 3$$

Из уравнения прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$ следует, что $k = 2$ и $b = 3$.

Пример: Найдите угловой коэффициент прямой по двум точкам $A(3, 8)$и $B(2, 10)$.

Воспользуемся правилом: если на прямой а взяты точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, подставим в формулу координаты точек A, B и получим: $k = \frac{10 - 8}{2 - 3} = -2$.

Пример: Вычислите тангенс одного из углов, образуемых прямыми: $x + 5y - 7 = 0$ и $2x - 3y + 8 = 0$. Воспользуемся правилом: если прямые а и b пересекаются, то $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$. Чтобы найти угловые коэффициенты прямых k_1 и k_2, нужно из их уравнений выразить y, получим: $x + 5y - 7 = 0$

$$5y = -x + 7$$

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$y = -0{,}25x + 1{,}4$$

Т.е. $k_1 = -\frac{1}{5}$ теперь найдем второй коэффициент:

$$2x - 3y + 8 = 0$$

$$-3y = -2x - 8$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$$

Т.е. $k_2 = \frac{2}{3}$, подставим полученные данные в формулу $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ и получим ответ: $tg\varphi = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{10+3}{15}}{\frac{15-2}{15}} = \frac{13}{15} \cdot \frac{15}{13} = 1.$

3) Уравнение прямой "в отрезках": $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.Числа a и b равны длинам отрезков, отсекаемых прямой от осей OX и OY, считая от начала координат.

Пример: Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $P(4, -3)$, отсекающей от координатных осей отрезки одинаковой длины. Т.к. отрезки одинаковой длины, то $a = b$. Подставим координаты точки $P(4, -3)$в уравнение прямой "в отрезках": $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, получим:

$\frac{4}{a} + \frac{-3}{a} = 1$ (т.к. $a = b$)

$$\frac{4-3}{a} = 1$$

$$\frac{1}{a} = 1$$

$a = 1 = b$, тогда уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$ или $x + y = 1$.

Время выполнения: 90 минут.

1. Найдите точку пересечения прямых $3x - y + 2 = 0$ и $5x - 2y + 6 = 0$.

2. Определите угловой коэффициент k и длину отрезка b, отсекаемого прямой на оси OY,для следующих прямых: 1) $3x - 2y - 6 = 0$

2) $5x + 3y - 12 = 0$ 3) $7x + y + 5 = 0$ 4) $3x + 2y = 0$ 5) $2y + 5 = 0$.

3. Найдите угловой коэффициент k прямой по двум точкам, лежащим на этой прямой: 1) $A(-1, 4)$, $B(1, 6)$ 2) $A(2, 5)$, $B(3, 4)$ 3) $A(-2, 3)$, $B(-1, 3)$ 4) $A(5, 9)$, $B(-2, 12)$.

4. Вычислите тангенс одного из углов, образуемых прямыми:

$5x + 2y - 9 = 0$ и $3x - 2y + 15 = 0$.

5. Пользуясь утверждением (угол между двумя прямыми равен углу между нормальными векторами), формулами скалярного произведения и $\vec{n} = \{A; B\}$, найти угол между прямыми: $3x + 2y + 1 = 0$ и $2x - 3y + 6 = 0$.

6. Пользуясь формулами нахождения координат вектора через координаты его концов и $\vec{l} = \{-B; A\}$, написать уравнение прямой, если известно, что она проходит через точки $P(1, -3)$ и $Q(6, -1)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

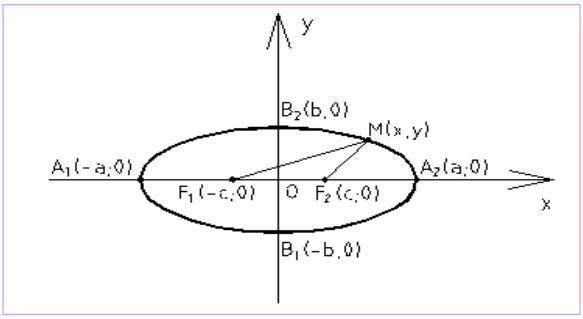
по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Составление уравнений окружности, гиперболы, эллипса.

Цель: Научиться решать задачи, используя кривых второго порядка на плоскости.

Кривые второго порядка.

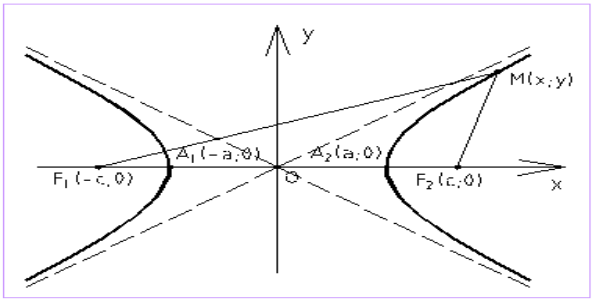
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллипса.



Эллипс симметричен относительно осей координат. Параметры a и bназываются полуосями эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$называются его вершинами.

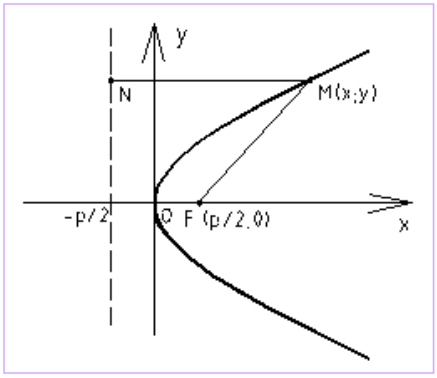
Если $a > b$, то фокусы находятся на оси OX на расстоянии$c = \sqrt{a^2 - b^2}$от центра эллипса O, если $a < b$, то фокусы находятся на оси OYи $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$– уравнение окружности, где $\mathrm{O(a, b)}$ – центр, R- радиус.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы. Гипербола симметрична относительно осей координат. Она пересекает ось OX в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ – вершинах гиперболы, и не пересекает оси OY.

Параметр a называется вещественной полуосью, b – мнимой полуосью. Фокусы находятся по формуле $c^2 = a^2 + b^2$. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.



$y^2 = 2px$ – уравнение параболы.Парабола, заданная указанным каноническим уравнением, симметрична относительно оси OX, она имеет фокус $F\left(\frac{p}{2};0\right)$и директрису $x = -\frac{p}{2}$.Если вершина параболы перенесена с точку $\mathrm{C(a,b)}$, то уравнение примет вид: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$.

Пример: Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(3,1)$, которая проходит через точку $\mathrm{A}(7,4)$. Чтобы написать уравнение окружности, нужно знать координаты ее центра и радиус. Координаты центра нам известны из условия, а для нахождения радиуса воспользуемся формулой векторной алгебры (нахождение расстояния между двумя точками или длины вектора):

$$R = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (1-4)^2} =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Подставим в уравнение окружности координаты центра и радиус $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ и получим ответ:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5^2$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Пример: Определить длины полуосей следующих эллипсов: а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

б) $x^2 + 144y^2 = 576$ в) $x^2 + 144y^2 = 1$ г) $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Приведем все уравнения к общему виду уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и найдем длины полуосей:

а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ б) $x^2 + 144y^2 = 576$ в) $x^2 + 144y^2 = 1$ г) $9x^2 + 4y^2 = 36$

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ $\frac{x^2}{576} + \frac{144y^2}{576} = 1$ $\frac{x^2}{1} + \frac{144y^2}{1} = 1$ $\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1$

$a = 5, b = 4.$ $\frac{x^2}{24^2} + \frac{y^2}{\frac{24^2}{12^2}} = 1$ $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\frac{1^2}{12^2}} = 1$ $\frac{x^2}{\frac{6^2}{3^2}} + \frac{y^2}{\frac{6^2}{2^2}} = 1$

$a = 24, b = \frac{24}{12} = 2.$ $a = 1, b = \frac{1}{12}.$ $a = \frac{6}{3} = 2, b = \frac{6}{2} = 3.$

Пример: Напишите координаты фокуса параболы F и напишите уравнение ее директрисы, если уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 16x$.

Приведем вышеуказанное уравнение к общему виду уравнения параболы $y^2 = 2px$ и найдем ее параметр p: $y^2 = 2 \cdot 8 \cdot x$, из этого следует, что $p = 8$. Чтобы найти фокус и директрису параболы подставим параметр p в формулы $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ и $x = -\frac{p}{2}$, получим ответ: $F\left(\frac{8}{2}; 0\right)$, $F(4; 0)$, $x = -\frac{8}{2} = -4$.

Пример: Найти координаты фокуса F, вершины C и написать уравнение директрисы параболы: а)$y^2 - 6y + 9 = 4x$ б)$y^2 + 2y + 9 = 8x$ в)$y^2 = 2x + 8$ г) $6y = x^2 - 8x + 4$.

Приведем все уравнения к уравнению параболы вида $(y - b)^2 = 2p(x - a)$ со смещенной вершиной в точку $C(\mathrm{a}, b)$и найдем координаты фокуса F, вершины C и уравнение директрисы:

Для нахождения координат центра воспользуемся формулами сокращенного умножения:

1. Квадрат суммы двух выражений равен: $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$
2. Квадрат разности двух выражений равен: $(\mathrm{a} - \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$
3. Разность квадратов: $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a} - \mathrm{b})(\mathrm{a} + \mathrm{b})$
4. Куб суммы: $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^3 = \mathrm{a}^3 + 3\mathrm{a}^2\mathrm{b} + 3\mathrm{ab}^2 + \mathrm{b}^3$
5. Куб разности: $(\mathrm{a} - \mathrm{b})^3 = \mathrm{a}^3 - 3\mathrm{a}^2\mathrm{b} + 3\mathrm{ab}^2 - \mathrm{b}^3$
6. Сумма кубов: $\mathrm{a}^3 + \mathrm{b}^3 = (\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a}^2 - \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2)$
7. Разность кубов: $\mathrm{a}^3 - \mathrm{b}^3 = (\mathrm{a} - \mathrm{b})(\mathrm{a}^2 + \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2)$

а)$y^2 - 6y + 9 = 4x$

Воспользуемся формулой:

$(\mathrm{a} - \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$

$y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$

б)$y^2 + 2y + 9 = 8x$

Выделим полный квадрат суммы и воспользуемся формулой: $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$

$y^2 + 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2 - 1^2 + 9 = 8x$

$$(y-3)^2 = 2\cdot 2\cdot (x-0)$$

$$C(0{,}3), p = 2, F(1;0), x = -1.$$

$$(y+1)^2 - 1 + 9 = 8x$$

$$(y+1)^2 + 8 = 8x$$

$$(y+1)^2 = 8x - 8$$

$$(y+1)^2 = 8(x-1)$$

$$(y+1)^2 = 2\cdot 4\cdot (x-1)$$

$$C(1,-1), p = 4, F(2;0), x = -2.$$

в) $y^2 = 2x + 8$

$$y^2 = 2(x+4)$$

$$y^2 = 2\cdot 1\cdot (x+4)$$

$$C(-4{,}0), p = 1, F\left(\frac{1}{2};0\right),$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

г) $6y = x^2 - 8x + 4.$

Выделим полный квадрат разности и воспользуемся формулой: $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2 = \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$

$$6y = x^2 - 2\cdot 4\cdot x + 4^2 - 4^2 + 4$$

$$6y = (x-4)^2 - 4^2 + 4$$

$$6y = (x-4)^2 - 16 + 4$$

$$6y = (x-4)^2 - 12$$

$$6y + 12 = (x-4)^2$$

$$6(y+2) = (x-4)^2$$

$$6(y+2) = (x-4)^2$$

$$2\cdot 3\cdot (y+2) = (x-4)^2$$

$$C(4,-2), p = 3, F(1{,}5;0), x = -1{,}5.$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой $2x + 5y - 10 = 0$ от координатного угла.

2. Напишите уравнение окружности, если $R = 6$, $C(1,3)$-центр окружности.

3. Определите длины полуосей и вид кривой второго порядка: 1) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 2) $9x^2 + 64y^2 = 576$ 3) $16x^2 + 25y^2 = 1$ 4) $64x^2 + 9y^2 = 1$ 5) $\frac{x^2}{81} - y^2 = 1$ 6) $25x^2 - 4y^2 = 100$ 7) $36x^2 - 121y^2 = 1$ 8) $144x^2 - 36y^2 = 1.$

4. Напишите уравнение параболы, если известен ее фокус $F(5;0)$ и уравнение директрисы $x = -5$.

5. Установите, что кривые, определяемые следующими уравнениями, являются параболами и найдите ее вершину и параметр p: 1) $y^2 + 4y + 4 = 6x$ 2) $y^2 + 14 = 6x + 2$ 3) $4y = x^2 + 6x + 9$.

6. Найти координаты точек пересечения прямой и кривой второго порядка, заданных уравнениями: 1) $3x - 2y + 23 = 0$ и $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 130$ 2) $4x - 5y - 20 = 0$ и $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 3) $x - y - 13 = 0$ и $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$ 4) $x + 2y - 12 = 0$ и $4y = x^2$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Элементы аналитической геометрии».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Элементы аналитической геометрии».

Проверочная работа № 2 по теме: «Элементы аналитической геометрии».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 13-14 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 10-12 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 7-9 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 7 заданий.

В-1

1. Коллинеарны ли вектора $\overrightarrow{5a} - \overrightarrow{6b}$ и $\vec{c} + \overrightarrow{6d}$? Если $\vec{a}\{2; -3; 6\}$, $\vec{b}\{-1; 7; 8\}$, $\vec{c}\{0; 3; -5\}$, $\vec{d}\{9; -10; 2\}$.

2.Образуют ли базис вектора (являются линейно не зависимыми) $\vec{a}\{6; -1; 0\}$, $\vec{b}\{3; -2; 4\}$, $\vec{c}\{1; -1; 0\}$?

3. Ортогональны ли вектора $\vec{a}\{6; 12; 0\}$, $\vec{b}\{-6; 3; 0\}$?

4. Найти скалярное произведение векторов и определить вид угла (прямой, острый, тупой). а) $\vec{a}\{-3;7;6\}$, $\vec{b}\{-7;6;-3\}$ б) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$, $(a\hat{}b) = \frac{\pi}{2}$

5. Найти длину вектора $\vec{a}\{-9;-3;\sqrt{10}\}$.

6. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\{-12;5;0\}$, $\vec{b}\{6;0;-8\}$.

7. Найти орт вектора $\vec{a}\{-4;3;-12\}$.

8. Найти координаты вектора $6\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$, если $A(3;-2;6), B(-7;0;16), C(9;10;-13), D(1;3;-5)$.

9. Найти точку пересечения прямых $3y + x + 17 = 0$ и $3x - 9y + 21 = 0$.

10. Для прямой $6x + 3y + 12 = 0$. а) Определить k иb б) Написать уравнения прямых, проходящих через точку $C(-1;2)$, первая из которых параллельна данной прямой, а вторая перпендикулярна.

11. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой

$3x + 6y - 18 = 0$ от координатного угла.

12. Написать уравнение окружности, если $C(-3;5)$- центр окружности, а радиус равен 3.

13. Определить длины полуосей a иb:

а) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{121} = 1$ б)$x^2 - 49y^2 = 25$ в)$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

14. Найти координаты фокуса F, вершины C и написать уравнение директрисы параболы: а)$y^2 = 24x$б)$y^2 - 4y + 4 = 32x - 160$.

В-2

1. Коллинеарны ли вектора $\overrightarrow{3a} - \overrightarrow{2b}$ и $\overrightarrow{5c} + \vec{d}$? Если $\vec{a}\{1;-2;4\}$, $\vec{b}\{-5;0;1\}$, $\vec{c}\{0;4;-3\}$, $\vec{d}\{7;-8;12\}$.

2.Образуют ли базис вектора (являются линейно не зависимыми) $\vec{a}\{1;2;-2\}$, $\vec{b}\{5;7;1\}$, $\vec{c}\{3;3;5\}$?

3. Ортогональны ли вектора $\vec{a}\{2;12;0\}$, $\vec{b}\{-6;-3;0\}$?

4. Найти скалярное произведение векторов и определить вид угла (прямой, острый, тупой). а)$\vec{a}\{-7;1;4\}$, $\vec{b}\{9;4;-1\}$ б) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $(a\hat{}b) = \frac{\pi}{3}$

5. Найти длину вектора $\vec{a}\{-5; 6; \sqrt{20}\}$.

6. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\{6; 8; 0\}$, $\vec{b}\{-4; 0; 3\}$.

7. Найти орт вектора $\vec{a}\{-4; 3; 0\}$.

8. Найти координаты вектора $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$, если $A(1; -2; -3), B(5; 0; 6), C(-4; 10; 7), D(9; -2; 3)$.

9. Найти точку пересечения прямых $2x - y - 7 = 0$ и$x + 3y - 7 = 0$.

10. Для прямой $10x + 2y - 16 = 0$. а) Определить k иb б) Написать уравнения прямых, проходящих через точку $C(1; -2)$, первая из которых параллельна данной прямой, а вторая перпендикулярна.

11. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой

$5x + 10y - 20 = 0$ от координатного угла.

12. Написать уравнение окружности, если $C(8; -6)$- центр окружности, а радиус равен 4.

13. Определить длины полуосей a иb:

а) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ б) $\frac{x^2}{100} + 4y^2 = 1$ в)$25x^2 - 9y^2 = 100$.

14. Найти координаты фокуса F, вершины C и написать уравнение директрисы параболы: а)$y^2 - 8y + 16 = 16x$б)$y^2 = 100x + 500$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Построение графиков элементарных функций, вычисление пределов.

Цель: Научиться находить предел функции в точке и на бесконечности.

Определение функции. Графики элементарных функций.

Числовой функцией с областью определенияDназывается соответствие, при котором каждому числуxиз множестваDсопоставляется по некоторому правилу числоy, зависящее отx.

Область определения функции –это множество всех значений аргумента, на котором задается функция.

График функции $y = f(x)$ - это множество всех точек плоскости, координаты x, у которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

Функция называется чётной, если справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция называется нечётной, если справедливо равенство $f(-x) == -f(x)$.Функции, не принадлежащие ни одной из категорий выше, называются ни чётными, ни нечётными(или функциями общего вида).

Функция называется периодической с периодом T, если справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

Пример: Найдите область определения функции, выясните является ли она четной, нечетной или общего вида, и нарисуйте ее график: а) $y = |x + 2|$ б) $y = x + x^2$ в) $y = \frac{1}{x^2}$ г) $y = 4^{x+2}$ д) $y = \log_5(x + 2)$.

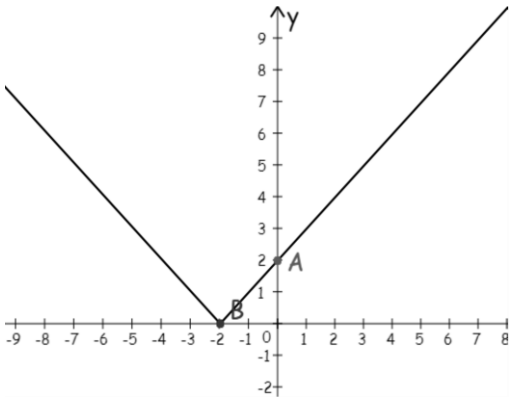
Напомним, что на область определения функции могут накладываться следующие ограничения: 1) подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю; 2) знаменатель не равен нулю; 3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля.

а) $y = |x + 2|$

Т.к. ни одно из трех ограничений не подходит к данной функции, можно сделать вывод, что x - любое число, т.е. $D(y): (-\infty;\ \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо xподставить $-x$: $y(-x) = |-x + 2|$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y): (-\infty;\ \infty)$, x для построения графика можно брать любое.



x	y
0	$y = \|0 + 2\| = \|2\| = 2$
-2	$y = \|-2 + 2\| = \|0\| = 0$
-5	$y = \|-5 + 2\| = \|-3\| = 3$

Построим график по данным точкам.

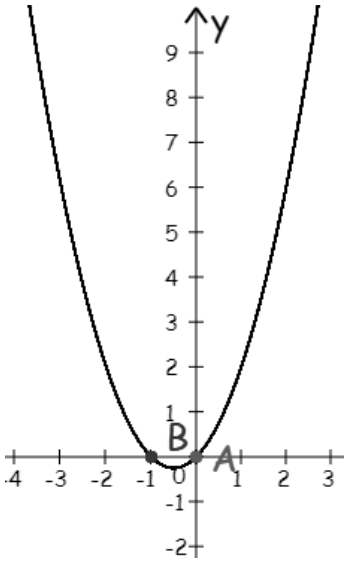
б) $y = x + x^2$

Т.к. ни одно из трех ограничений не подходит к данной функции, можно сделать вывод, что x - любое число, т.е. $D(y)$: $(-\infty;\ \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = -x + (-x)^2 = -x + x^2$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y)$: $(-\infty;\ \infty)$, x для построения графика можно брать любое. При построении параболы сначала находят координаты ее вершины, а затем берут точки симметричные относительно нее. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится по формуле: $x_0 = -\frac{b}{2a}$. В данном примере коэффициент при x^2 и x равен 1, т.е. $a = 1$ и $b = 1$. Найдем вершину параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$. Для того чтобы найти ординату вершины параболы подставим x_0 в функцию, получим $y_0 = -0{,}5 + (-0{,}5)^2 = -0{,}5 + +0{,}25 = -0{,}25$.

x	y
-3	$y = -3 + (-3)^2 = -3 + 9 = 6$
-2	$y = -2 + (-2)^2 = -2 + 4 = 2$
-1	$y = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$
$-0{,}5$	$-0{,}25$
0	$y = 0 + 0^2 = 0$
1	$y = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$
2	$y = 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$



Построим график по данным точкам.

в) $y = \frac{1}{x^2}$

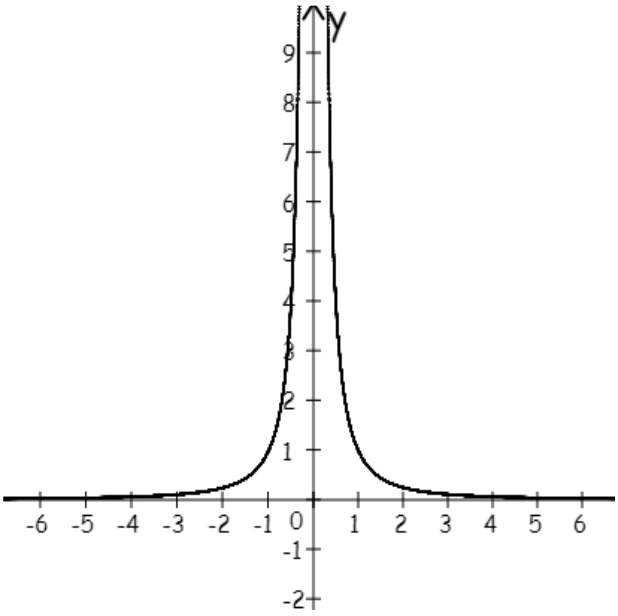
В данном примере (ограничение 2) знаменатель не равен нулю) $x^2 \neq 0$, т.е. $x \neq 0$. Можно сделать вывод, что x - любое число, кроме 0, т.е.

$$D(y): (-\infty;\ 0) \cup (0; \infty)$$

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо

xподставить $-x$: $y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$. Т.к. справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, то функция является четной. Исходя из того, что

$D(y): (-\infty;\ 0) \cup (0; \infty)$, x для построения графика можно брать любое, кроме 0.



x	y
-2	$y = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
-1	$y = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$
$-\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
$-\frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
$\frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$
1	$y = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$
2	$y = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Построим график по данным точкам.

г) $y = 4^{x+2}$

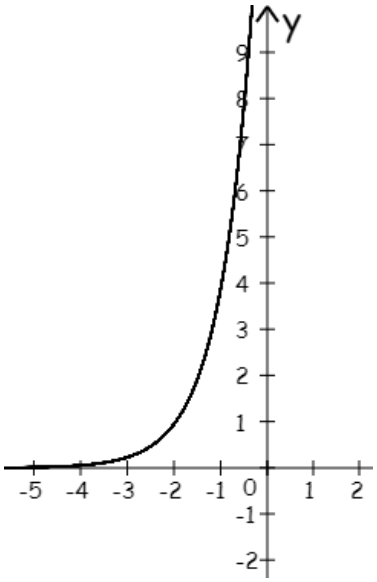
Т.к. ни одно из трех ограничений не подходит к данной функции, можно сделать вывод, что x - любое число, т.е. $D(y): (-\infty;\ \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = 4^{-x+2}$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из

категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y)$: $(-\infty;\ \infty)$, x для построения графика можно брать любое.

x	y
-3	$y = 4^{-3+2} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
-2	$y = 4^{-2+2} = 4^{0} = 1$
-1	$y = 4^{-1+2} = 4^{1} = 4$
0	$y = 4^{0+2} = 4^{2} = 16$



Построим график по данным точкам.

д) $y = \log_5(x + 2)$

В данном примере (ограничение 3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля) $x + 2 > 0$, т.е. $x > -2$. Можно сделать вывод, что x - любое число больше -2, т.е. $D(y)$: $(-2; \infty)$.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = \log_5(-x + 2)$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

Исходя из того, что $D(y)$: $(-2; \infty)$, x для построения графика можно брать любое больше -2. При построении логарифмической функции будем подбирать такие x, чтобы значения логарифма можно было бы посчитать без калькулятора.

$y = \log_5 5 = 1$, т.е. $x + 2 = 5$, $x = 3$.

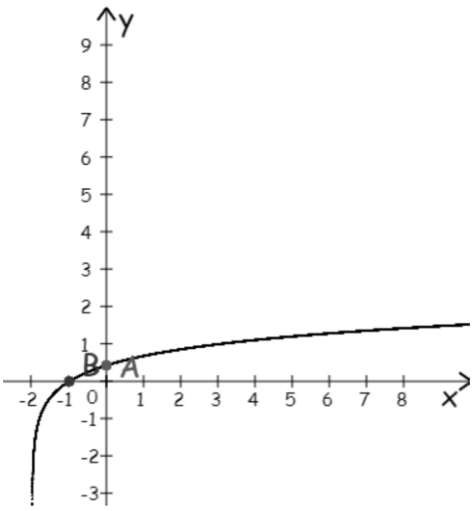
$y = \log_5 1 = 0$, т.е. $x + 2 = 1$, $x = -1$.

$y = \log_5 \frac{1}{5} = -1$, т.е. $x + 2 = \frac{1}{5}$,

$x = \frac{1}{5} - 2 = \frac{1-10}{5} = -\frac{9}{5} = -1{,}8$.

Составим таблицу по полученным данным:

x	y
3	$y = 1$
-1	$y = 0$
$-1{,}8$	$y = -1$



Построим график по данным точкам.

Предел и непрерывность функции в точке и на бесконечности.

Числоbназывается пределом функции$y = f(x)$ приx, стремящемся кa, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a , соответствующая последовательность $f(x_n)$ сходится к b, т.е. $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точкеa, если она определена в точке aи существует предел, равный значению функции в точке a, т.е.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Прежде всего, перед решением любого предела,обязательновыполняем подстановку «икса» в функцию –неопределённости может и не быть!

Если a - любое число, то справедливы равенства: $\frac{a}{\infty} = 0, \frac{0}{a} = 0,\ \frac{0}{\infty} = 0, \frac{a}{0} = \infty$.

Виды неопределённостей: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$.

Первый замечательный предел применим к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ или $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$.

Второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^{∞} : $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$ или $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Пример: Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2}{x^3 + 4}$б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$в) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 5x + 6}$ г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + 4x - x^2}{4x^2 + x + 1}$д) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}$.

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2}{x^3 + 4}$. Вместо x подставим в предел число 2 и посчитаем его:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^3+4}=\frac{2^2-2}{2^3+4}=\frac{4-2}{8+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$. В рассмотренном примере неопределенности нет.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}$. Вместо x подставим в предел число 1 и посчитаем его:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1^2-1}{1^3-1^2+1-1}=\frac{1-1}{1-1+1-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Это неопределенность, чтобы она исчезла нужно выполнить те или иные преобразования (разложение на множители и сокращение дроби).

Разложить на множители многочлен можно несколькими способами:

1) с помощью формул сокращенного умножения:

1. Квадрат суммы двух выражений равен:$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$

2. Квадрат разности двух выражений равен:$(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2=\mathrm{a}^2-2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$

3. Разность квадратов: $\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$

4.Куб суммы: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3=\mathrm{a}^3+3\mathrm{a}^2\mathrm{b}+3\mathrm{ab}^2+\mathrm{b}^3$

5.Куб разности:$(\mathrm{a}-\mathrm{b})^3=\mathrm{a}^3-3\mathrm{a}^2\mathrm{b}+3\mathrm{ab}^2-\mathrm{b}^3$

6.Сумма кубов:$\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3=(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}^2-\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)$

7.Разность кубов:$\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2)$

2) вынесением общего множителя.

3) квадратный трехчлен раскладывается с помощью дискриминанта по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

В данном примере числитель раскладывается по формуле сокращенного умножения $\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$, получим:

$x^2-1=x^2-1^2=(x-1)(x+1)$, а знаменатель - вынесением общего множителя:

$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$. Подставим полученные выражения в предел, сократим дробь и снова подставим 1:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1+1}{1^2+1}=\frac{2}{2}=1.$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}$

Вместо x подставим в предел число 2 и посчитаем его:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2^2-5\cdot 2+6}=\frac{\sqrt{4}-2}{4-10+6}=\frac{2-2}{-6+6}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Это неопределенность, чтобы она исчезла нужно выполнить те или иные преобразования. В данном примере числитель умножаем и делим на сопряженное выражение $\sqrt{x+2}+2$ (для получения формулы разности квадратов: $\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b})$ и избавления от корня), получим:

$$\sqrt{x+2}-2=\frac{(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{(\sqrt{x+2})^2-2^2}{(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{x+2-4}{(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{(x-2)}{(\sqrt{x+2}+2)}.$$

Знаменатель разложим с помощью формулы квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. В первую очередь пользуясь формулой дискриминанта найдем корни квадратного трехчлена:

$$x^2-5x+6=0$$

$$a=1, b=-5, c=6$$

$$D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x^2-5x+6=1\cdot(x-3)(x-2)=(x-3)(x-2)$$

Подставим полученные выражения в предел, сократим дробь и снова подставим 2: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)}{\frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(x-3)(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(\sqrt{x+2}+2)(x-3)(x-2)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)(x-3)}=\frac{1}{(\sqrt{2+2}+2)(2-3)}=\frac{1}{(\sqrt{4}+2)(-1)}=\frac{1}{(2+2)(-1)}$$

$$=\frac{1}{4(-1)}=-\frac{1}{4}$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}$

Вместо x подставим в предел ∞, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\frac{1+4\cdot\infty-\infty^2}{4\cdot\infty^2+\infty+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Это неопределенность. При вычислении пределов, стремящихся к бесконечности, изначально определяют старшую степень многочлена и делят на переменную в данной степени. В приведенном выше многочлене старшая степень равна 2. Разделим каждый член многочлена на x^2, сократим дроби и снова подставим ∞:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1}{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty^2}+\frac{4}{\infty}-1}{4+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}$. Из равенства $\frac{a}{\infty}=0$, где a - любое число следует, что $\frac{1}{\infty^2},\frac{4}{\infty},\frac{1}{\infty},\frac{1}{\infty^2}$ стремятся к 0,т.е. предел равен: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1}{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty^2}+\frac{4}{\infty}-1}{4+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=-\frac{1}{4}=-0{,}25.$

При вычислении пределов многочленов, стремящихся к бесконечности, достаточно определить многочлен старшей степени числителя и знаменателя, а остальные многочлены младшей степени отбросить. Это упростит запись решения: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^2}{4x^2+x+1}=\frac{1+4\cdot\infty-\infty^2}{4\cdot\infty^2+\infty+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{4x^2}=-\frac{1}{4}=-0{,}25.$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}$

Вместо x подставим в предел ∞, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}=\frac{\infty^2\cdot\left(\sqrt{\infty^3+1}-\sqrt{\infty^3-1}\right)}{\sqrt{4\cdot\infty+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Это неопределенность. При вычислении пределов, стремящихся к бесконечности, изначально определяют старшую степень многочлена и делят на переменную в данной степени. В приведенном выше примере нельзя определить многочлен старшей степени числителя, пока не избавимся от разности корней, поэтому числитель умножаем и делим на сопряженное выражение $\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)$ (для получения формулы разности квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ и избавления от корня), получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}{\sqrt{4x+1}\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^3-1}\right)^2\right)}{\sqrt{(4x+1)(x^3+1)} + \sqrt{(4x+1)(x^3-1)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x^3+1-x^3+1)}{\sqrt{4x^4+4x+x^3+1} + \sqrt{4x^4-4x+x^3-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{2x^2+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Многочленом старшей степени выражений $\sqrt{4x^4+4x+x^3+1}$ и $\sqrt{4x^4-4x+x^3-1}$ является $4x^4$ все остальные многочлены младшей степени отбросим, получим:

$$\sqrt{4x^4+4x+x^3+1} = \sqrt{4x^4} = 2x^2, \sqrt{4x^4-4x+x^3-1} = \sqrt{4x^4} = 2x^2.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$

1.	$sin\, x \sim x$	5.	$1 - cos\, x \sim \frac{x^2}{2}$	9.	$log_a(1+x) \sim \frac{x}{lna}$
2.	$arc\, sin\, x \sim x$	6.	$e^x - 1 \sim x$	10.	$(1+x)^a - 1 \sim ax$
3.	$tgx \sim x$	7.	$a^x - 1 \sim xlna$	11.	$shx \sim x$
4.	$arctgx \sim x$	8.	$ln(1+x) \sim x$	12.	$thx \sim x$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x arcsin(5x)}$.

Вместо x подставим в предел 0, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x arcsin(5x)} = \frac{1-\cos 3\cdot 0}{0\cdot arcsin(5\cdot 0)} = \frac{1-\cos 0}{0\cdot \arcsin 0} = \frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Это неопределенность. Для вычисления пределов тригонометрических функций при $x \to 0$ используют таблицу эквивалентных бесконечно малых функций. По 5 формуле ($1 - cos\, x \sim \frac{x^2}{2}$) выражение $1 - \cos 3x = \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9x^2}{2}$, по 2 формуле ($arc\, sin\, x \sim x$) выражение $arcsin(5x) = 5x$. Полученные данные подставим в предел, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x arcsin(5x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^2}{2}}{x\cdot 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^2}{10x^2} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Найдите область определения функции, выясните является ли она четной, нечетной или общего вида, и нарисуйте ее график: 1) $y = x$ 2) $y = -x$

3) $y = x + 2$ 4) $y = |x|$ 5) $y = -x^2$ 6) $y = x - x^2$ 7) $y = -\frac{1}{x}$ 8) $y = \frac{3}{x+2}$ 9) $y = 2^x$ 10) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 11) $y = 5^{-x}$ 12) $y = \log_2 x$ 13) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 14) $y = \lg(-x)$.

2. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x^3+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{4x}}{x\left(\sqrt{2+4x^2}+2\right)}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$ 7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2+3x+2)\sqrt{2+x}}{x^2-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^3+x^2+x+1}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+\sin 3x)}{2tg5x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tg4x}-1}{2arcsin5x}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+3arcsinx}-1}{5sh3x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+sinx}-1}{3^x-1}$ 13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3th2x}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5^{x^2}-1}$ 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt[5]{1+tgx}-1}$ 16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\arcsin x}-1}{ln(1-3x)}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Предел функции».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Предел функции».

Проверочная работа № 3 по теме: «Предел функции».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 11-12 примеров.

«хорошо» - верно выполнено 9-10 примеров.

«удовлетворительно» - верно выполнено 6-8 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 6 примеров.

В-1

1. Найти предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2+9x-20}{x^2-15}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x^2+50}{2x^3-12x^2-3x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{9x^8+2x-11}}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

2. Найти область определения функции, определить вид функции (четная, нечетная, общего вида) и построить график функции: а) $y = -x + 1$ б) $y = |x - 3|$ в) $y = x^2 + 2x$ г) $y = \frac{5}{x-2}$ д) $y = 0{,}5^x$ е) $y = \log_3(x - 1)$.

В-2

1. Найти предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-3x-20}{x^2-15}$ б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2-6x-16}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-x^2+10}{10x^3+2x^2-13x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x^6-2x}{\sqrt{25x^{12}+2x-1}}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+3x)}{arcsinx}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+49}-7}$.

2. Найти область определения функции, определить вид функции (четная, нечетная, общего вида) и построить график функции: а) $y=-x-1$ б) $y=|x-2|$ в) $y=x^2-4x$ г) $y=\frac{6}{x+1}$ д) $y=3^x$ е) $y=\log_3(x+2)$.

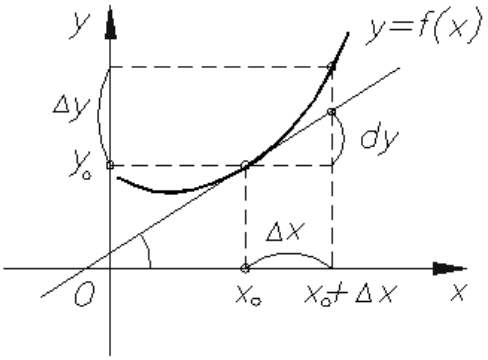
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Вычисление производных, составление уравнений касательной и нормали к графику функции.

Цель: Научиться находить производные элементарных и сложных функций, с помощью производной составлять уравнение касательной и нормали к графику функции.

Производная функции − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Обратная операция − восстановление функции по известной производной − называется интегрированием. Производная функции в некоторой точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Оценку скорости изменения можно получить, вычислив отношение изменения функции Δy к соответствующему изменению аргумента Δx.



В определении производной такое отношение рассматривается в пределе при условии $\Delta x\to 0$. Перейдем к более строгой формулировке: приращением аргумента называется разность между двумя значениями аргумента: "новым" и "старым". Обычно

обозначается как $\Delta x = x_1 - x_0$.

Производной $y^/(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при$\Delta x \to 0$, если он существует, то есть: $y^/(x_0) = f^/(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точкеx_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(C)^/ = 0$ (C-любое число)	8. $(\log_a x)^/ = \frac{1}{x \ln a}$	15. $(\operatorname{arctg} x)^/ = \frac{1}{1+x^2}$
2. $(x)^/ = 1$	9. $(\sin x)^/ = \cos x$	16. $(\operatorname{arcctg} x)^/ = -\frac{1}{1+x^2}$
3. $\left(\sqrt{x}\right)^/ = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10. $(\cos x)^/ = -\sin x$	17. $(\operatorname{sh} x)^/ = \operatorname{ch} x$
4. $(x^\alpha)^/ = \alpha x^{\alpha-1}$ (α-любое число)	11. $(tg\ x)^/ = \frac{1}{cos^2 x}$	18. $(\operatorname{ch} x)^/ = \operatorname{sh} x$
5. $(e^x)^/ = e^x$	12. $(ctg\ x)^/ = -\frac{1}{sin^2 x}$	19. $(\operatorname{th} x)^/ = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
6. $(a^x)^/ = a^x \ln a$(a-любое число)	13. $(\arcsin x)^/ = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20. $(\operatorname{cth} x)^/ = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
7. $(\ln x)^/ = \frac{1}{x}$	14. $(\arccos x)^/ = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	

Правила дифференцирования функций.

Правило	Формула
1. Постоянный множитель с можно выносить за знак производной.	$\left(cu(x)\right)^/ = cu^/(x)$
2. Если существуют производные $u^/(x)$ и $v^/(x)$, то производная от суммы (разности) функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме (разности) производных.	$\left(u(x) \pm v(x)\right)^/ = u^/(x) \pm v^/(x)$
3. Если существуют производные $u^/(x)$ и $v^/(x)$, то выполняются следующие правила дифференцирования произведения функций и частного от их деления:	$(u \cdot v)^/ = u^/v + uv^/$ $\left(\frac{u}{v}\right)^/ = \frac{u^/v - uv^/}{v^2}, v \neq 0$
4. Производная сложной функции равна производной внешней функции умноженной на производную внутренней функции.	$\left(u(v)\right)^/ = u^/(v) \cdot v^/$

Пример: Найти производную функции: а) $y = \frac{1}{x}$ б) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ в) $y = \frac{ctgx}{4}$

г) $y = \frac{\ln x}{3x^2+4}$ д) $y = \sin(x^2)$ е) $y = tg^3\left(\sqrt{x}\right)$.

а) $y = \frac{1}{x}$

Находим производную с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Напомним одно из свойств степеней $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (т.е. $\frac{1}{x} = x^{-1}$). Получим:

$$y^{/} = \left(\frac{1}{x}\right)^{/} = (x^{-1})^{/} = (-1) \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

б) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

Находим производную с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Напомним, что корень всегда можно представить в виде степени с рациональным показателем (т.е. $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$) и одно из свойств степеней $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (т.е. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$). Получим:

$$y^{/} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)^{/} = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{/} = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{-1-3}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

в) $y = \frac{ctgx}{4}$

Находим производную с помощью формулы: $(ctgx)^{/} = -\frac{1}{sin^2x}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций», не забываем, что константу можно вынести за знак производной, получим:

$$y^{/} = \left(\frac{ctgx}{4}\right)^{/} = \frac{1}{4} \cdot (ctg\,x)^{/} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{sin^2x}\right) = -\frac{1}{4sin^2x}.$$

г) $y = \frac{\ln x}{3x^2+4}$

Находим производную с помощью формул: $(\ln x)^{/} = \frac{1}{x}$, $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $(C)^{/} = 0$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования частного функций: $\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{u^{/}v-uv^{/}}{v^2}$, суммы (разности) функций: $\left(u(x) \pm v(x)\right)^{/} = u^{/}(x) \pm v^{/}(x)$, не забываем, что константу можно вынести за знак производной, получим:

$$y^{/} = \left(\frac{\ln x}{3x^2+4}\right)^{/} = \frac{(\ln x)^{/} \cdot (3x^2+4) - \ln x \cdot (3x^2+4)^{/}}{(3x^2+4)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(3x^2+4) - \ln x\left(3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + (4)^{/}\right)}{(3x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(3x^2+4) - \ln x \cdot 6x}{(3x^2+4)^2}$$

д) $y = \sin(x^2)$

Находим производную, с помощью формулы: $(\sin x)^{/} = \cos x$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. под знаком тригонометрической функции находится не просто x, а x^2), поэтому мы будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней. Напомним, что производная степенной функции находится по формуле $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (т.е. $(x^2)^{/} = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$), получим:

$y^{/} = (\sin(x^2))^{/} = \cos x^2 \cdot (x^2)^{/} = \cos x^2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2x \cos x^2$.

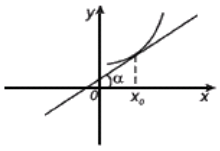
е) $y = tg^3\left(\sqrt{x}\right)$

Находим производную, с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. основанием степенной функции является не просто x, а $tg\sqrt{x}$; под знаком тригонометрической функции находится не просто x, а $\sqrt{x}$), поэтому мы будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней. Напомним, что $(tgx)^{/} = \frac{1}{cos^2 x}$, $\left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, получим: $y^{/} = \left(tg^3\left(\sqrt{x}\right)\right)^{/} =$

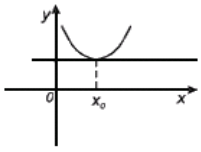
$$= 3 \cdot tg^{3-1}\left(\sqrt{x}\right) \cdot \left(tg\sqrt{x}\right)^{/} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^{/} = 3tg^2\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3tg^2\left(\sqrt{x}\right)}{2cos^2\sqrt{x}}.$$

Геометрический смысл производной.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0, равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке: $f^{/}(x) = tg\ \alpha = k$.



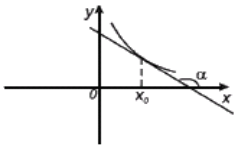
$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $y = f(x_0) - \frac{1}{f^{/}(x_0)}(x - x_0)$.



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

Пример: Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \sqrt{x+3}$в точке с абсциссой $x_0 = 6$.

Для составления уравнений касательной и нормали найдем производную функции, значение функции и ее производной в точке $x_0 = 6$:

$y^{/} = \left(\sqrt{x+3}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot (x+3)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$,

$y^{/}(6) = \frac{1}{2\sqrt{6+3}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{6}$, $y(6) = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$.

Подставим полученные данные в формулу: $y = f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0)$.

$$y = 3 + \frac{1}{6}(x - 6)$$

$$y = 3 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \cdot 6$$

$$y = 3 + \frac{1}{6}x - 1$$

$y = \frac{1}{6}x + 2$ - уравнение касательной.

Подставим полученные данные в формулу: $y = f(x_0) - \frac{1}{f^{/}(x_0)}(x - x_0)$.

$$y = 3 - \frac{1}{\frac{1}{6}}(x - 6)$$

$$y = 3 - 6(x - 6)$$

$$y = 3 - 6x + 36$$

$y = 39 - 6x$ - уравнение нормали.

Время выполнения: 90 минут.

1. Найдите производные функций: 1) $y = \sqrt{x}$ 2) $y = \frac{1}{x^2} - 3\frac{1}{\sqrt{x}} + 8$ 3) $y = (x+5)^7 + \sqrt{2}$ 4) $y = (2-3x)^5$ 5) $y = \frac{x}{1+x^2}$ 6) $y = x \cdot lnx$ 7) $y = tg(x^2) \cdot e^x$ 8) $y = \frac{ctg3x}{4\cos 5x}$ 9) $y = \sqrt{arcsin2x}$ 10) $y = arccos(2^{-x})$ 11) $y = \frac{arctg(2x)}{x}$ 12) $y = 3^{sh(3x+5)}$.

2. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции:

1) $y = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = -1$ 2) $y = \frac{3x^2}{2x+1}$ в точке $x_0 = 1$ 3) $y = e^{4-x^2}$ в точке $x_0 = 2$.

3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{10-9x}$в точке пересечения этого графика с прямой $y = 9x - 8$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13

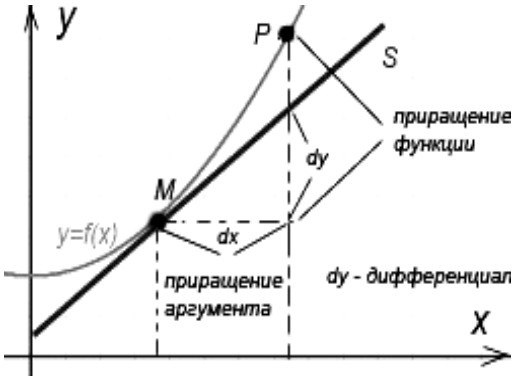
по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Применение дифференциала в приближенных вычислениях, вычисление пределов с помощью теоремы Лопиталя.

Цель: Научиться находить дифференциал функции и приближенное значение в нем, по правилу Лопиталя находить предел функции.

Понятие дифференциала, вычисление приближенного значения с помощью дифференциала.

Дифференциалом функции в некоторой точке x называется главная, линейная часть приращения функции.Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной x(аргумента). $dy = y^{/}(x_0)\Delta x$



Дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях:

$$\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{/}(x_0)\Delta x \approx f(x_0) + dy}$$

Пример: Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0{,}1$и вычислять приближенно $\sqrt{1{,}1}$.

Для вычисления дифференциала сначала найдем производную функции, а затем ее значение в точке $x_0 = 1$: $y^{/} = \left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (из таблицы «Производных основных элементарных функций»), $y^{/}(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Вычислим дифференциал по формуле: $dy = y^{/}(x_0)\Delta x = 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$

Для вычисления приближенного значения найдем значение функции в точке $x_0 = 1$ и подставим в формулу: $\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0)} + dy$, получим:

$y(1) = \sqrt{1} = 1,\ \sqrt{1{,}1} = y(1 + 0{,}1) \approx 1 + 0{,}05 \approx 1{,}05.$

Пример: Найти дифференциал функции $y = \ln x$ в точке x при произвольном Δx.

Для вычисления дифференциала найдем производную функции и подставим в формулу: $dy = y^{/}(x_0)\Delta x,$ получим:

$y^{/} = (\ln x)^{/} = \frac{1}{x},\ dy = \frac{1}{x}\Delta x.$

Теорема Лопита́ля (также правило Бернулли — Лопиталя) — метод нахожденияпределовфункций, раскрывающий неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема Лопиталя:

Если:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$

2) дифференцируемы в окрестности точки a, кроме может быть, самой этой точки;

3) $g^{/}(x) \neq 0$ в этой окрестности;

4) существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, то существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)} = A.$

Пример: Вычислить пределы по правилу Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$ д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - ctg\ x\right).$

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Вместо x подставим в предел 0, получим:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{\sin 0-0}{0^3}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Это неопределенность. По правилу Лопиталя находим производную числителя и знаменателя из таблицы «Производных основных элементарных функций» ($(\sin x)^{/}=\cos x$, $(x)^{/}=1$, $(x^{\alpha})^{/}=\alpha x^{\alpha-1}$) , а также таблицей эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$

($1-cos\,x\sim\frac{x^2}{2}$). Подставим и получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)^{/}}{(x^3)^{/}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\frac{\cos 0-1}{3\cdot 0^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^2}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$

Вместо x подставим в предел ∞, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\frac{\infty^2}{2^\infty}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Это неопределенность. По правилу Лопиталя находим производную числителя и знаменателя из таблицы «Производных основных элементарных функций» ($(x^{\alpha})^{/}=\alpha x^{\alpha-1}$, $(x)^{/}=1$, $(a^x)^{/}=a^x\ln a$). Подставим и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)^{/}}{(2^x)^{/}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\infty}{2^\infty\ln 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^{/}}{(2^x\ln 2)^{/}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\ln 2\cdot\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\ln^2 2}=\frac{2}{2^\infty\ln^2 2}=\frac{2}{\infty}=0$$

Здесь правило Лопиталя было применено дважды.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Вместо x подставим в предел ∞, получим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln\infty}{\sqrt{\infty}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Это неопределенность. По правилу Лопиталя находим производную числителя и знаменателя из таблицы «Производных основных элементарных функций» ($(\ln x)^{/}=\frac{1}{x}$, $\left(\sqrt{x}\right)^{/}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$). Подставим и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{/}}{\left(\sqrt{x}\right)^{/}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot 2\sqrt{x}}{x\cdot 1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}==\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\infty}}=0$$

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

Вместо x подставим в предел 0, получим:

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0\cdot\ln 0=0\cdot\infty$. Это неопределенность, чтобы применить правило Лопиталя, нужно преобразовать эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. В данном случае удобно сделать так, чтобы после дифференцирования ушел логарифм:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

По правилу Лопиталя находим производную числителя и знаменателя из таблицы «Производных основных элементарных функций» ($(\ln x)^{/}=\frac{1}{x}$, $(x^{\alpha})^{/}=$ $=\alpha x^{\alpha-1}$). Напомним одно из свойств степеней $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$ (т.е. $\frac{1}{x}=x^{-1}$). Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)^{/}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{/}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{(-1)\cdot x^{-1-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-1\cdot x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{1\cdot x^{2}}{x\cdot 1}=\lim_{x\to 0}-x=0.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctg\ x\right)$

Вместо x подставим в предел 0, получим:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctg\ x\right)=\frac{1}{0}-ctg\ 0=\infty-\infty$. Это неопределенность, чтобы применить правило Лопиталя, нужно преобразовать эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Приведем данное выражение к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctg\ x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x\cdot\sin x}=\frac{\sin 0-0\cdot\cos 0}{0\cdot\sin 0}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

По правилу Лопиталя находим производную числителя и знаменателя из таблицы «Производных основных элементарных функций» ($(\cos x)^{/} = -\sin x$, $(x)^{/} = 1$, $(\sin x)^{/} = \cos x$) и правил дифференцирования произведения функций: $(u \cdot v)^{/} = u^{/}v + uv^{/}$, суммы (разности) функций: $\left(u(x) \pm v(x)\right)^{/} = u^{/}(x) \pm v^{/}(x)$, а также таблицей эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$ ($sin\, x \sim x$), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{x\cdot\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{x\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x\cdot\cos x)^{/}}{(x^2)^{/}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^{/} - (x\cdot\cos x)^{/}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \left((x)^{/}\cdot\cos x + x\cdot(\cos x)^{/}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x))}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\cdot\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin 0}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Написать дифференциал функции: 1) $y = e^x$ в точке $x_0 = 0$ при $\Delta x \approx -0{,}1$ и вычислите приближенно $e^{-0{,}1}$. 2) $y = x^2 \cdot \cos(1 - x)$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x \approx 0{,}2$ и вычислите приближенно $y(1{,}2)$ 3) $y = \frac{2^x+1}{3x}$ в точке x при произвольном Δx. 4) $y = \sqrt[3]{arctg(2x)}$ в точке x при произвольном Δx 5) $y = arcsin^2(1 - 3x)$ в точке x при произвольном Δx.

2. Вычислите пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x^{15}-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\cos x}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2^x}{x^2-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0} 3x\cdot ln\sin x$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx} - \frac{1}{x-1}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Построение графиков с помощью производной.

Цель: Научиться с помощью производной проводить исследование функции.

Применение производной к исследованию функций.

1) Область определения

2) Выяснить является ли функция четной, нечетной или общего вида.

3) Точки пересечения с осями координат и интервалы, где $y > 0, y < 0$.

4) Нахождение асимптот функции. Если функция имеет вид: $y(x) = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}$, тогда:

1. если $n < m$, то график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

2. если $n = m$, то график имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{a_0}{b_0}$.

3. если $n = m + 1$, то график имеет наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$,

$b = \lim\limits_{x\to\infty} y(x) - kx$.

4) Вертикальные асимптоты определяют корни знаменателя.

Пример: Найти асимптоты графиков функций: а) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ б) $y = \frac{4x^2-1}{3x^2+1}$

в) $y = \frac{x^2}{x-2}$ г) $y = \frac{x^4}{x-1}$ д) $y = \frac{x^4}{x^2+1}$.

Воспользуемся приведенным выше правилом (n - старшая степень многочлена в числителе, m - старшая степень многочлена в знаменателе).

а) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$

$n = 2, m = 3, n < m$, следовательно график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. $x = -1$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

б) $y = \frac{4x^2-1}{3x^2+1}$

$n = 2, m = 2, n = m$, следовательно график имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{a_0}{b_0} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Вертикальных асимптот нет (т.к. знаменатель не имеет корней $3x^2 + 1 \neq 0$).

в) $y = \frac{x^2}{x-2}$

$n = 2, m = 1, n = m + 1$, следовательно график имеет наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (напомним, что при вычислении пределов многочленов, стремящихся к бесконечности, достаточно

определить многочлен старшей степени числителя и знаменателя, а остальные многочлены младшей степени отбросить).

$$b = \lim_{x\to\infty} y(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} - 1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} =$$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = \frac{2x}{x} = 2$. Наклонная асимптота имеет вид: $y = 1\cdot x + 2$, т.е. $y = x + 2$. $x = 2$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

г) $y = \frac{x^4}{x-1}$

$n = 4, m = 1, n > m + 1$, следовательно, график не имеет горизонтальных и наклонных асимптот. $x = 1$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

д) $y = \frac{x^4}{x^2+1}$

$n = 4, m = 1, n > m + 1$, следовательно, график не имеет горизонтальных и наклонных асимптот. Вертикальных асимптот нет (т.к. знаменатель не имеет корней $x^2 + 1 \neq 0$).

5) Находим точки максимума и минимума функции, значение функции в них и промежутки возрастания и убывания функции.

Если $y^/(x) > 0$, то функция возрастает, если $y^/(x) < 0$, то функция убывает.

Пусть a- корень уравнения $y^/(x) = 0$.

Если при переходе через точку a, производная меняет знак с "-" на "+", то a - точка минимума функции.

Если при переходе через точку a, производная меняет знак с "+" на "-", то a - точка максимума функции.

Пример: Найти интервалы возрастания и убывания, точки экстремума (максимума, минимума) функции: $y = x^3(4 - x)$.

Находим производную функции с помощью формул: $(C)^/ = 0$, $(x^\alpha)^/ = \alpha \cdot \cdot x^{\alpha-1}$, $(x)^/ = 1$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования произведения функций: $(u\cdot v)^/ = u^/v + uv^/$, суммы (разности) функций: $\big(u(x) \pm v(x)\big)^/ = u^/(x) \pm v^/(x)$:

$$y^{/} = \left(x^3(4-x)\right)^{/} = (x^3)^{/} \cdot (4-x) + x^3 \cdot (4-x)^{/} = 3x^2(4-x) + +x^3(-1)$$
$$= 12x^2 - 3x^3 - x^3 = 12x^2 - 4x^3$$

Приравняем производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

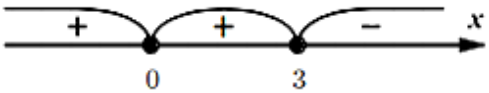
$$12x^2 - 4x^3 = 0$$
$$4x^2(3-x) = 0$$

$4x^2 = 0$ или $3 - x = 0$

$x^2 = 0$ или $-x = -3$

$x = 0$ или $x = 3$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак производной:

$-1 \in (-\infty; 0)$: $y^{/}(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1)^3 = 12 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 16$

$16 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$1 \in (0; 3)$: $y^{/}(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^3 = 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8$

$8 > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$4 \in (3; \infty)$: $y^{/}(4) = 12 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4^3 = 12 \cdot 16 - 4 \cdot 64 = 192 - 256 = -64$

$-64 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

При переходе через точку 3, производная меняет знак с "+" на "-", т.е. 3 - точка максимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(3) = 3^3(4-3) = 27 \cdot 1 = 27.$

Подведем итоги:

$$y \uparrow \text{ при } x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$$
$$y \downarrow \text{ при } x \in (3; \infty)$$

$x_{max} = 3, y_{max} = 27.$

Точек минимума нет.

6)Находим точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

Если $y^{//}(x) > 0$, то функция выпукла вниз, если $y^{//}(x) < 0$, то выпукла вверх.

Пусть a- корень уравнения $y^{//}(x) = 0$.

Если при переходе через точку a, вторая производная меняет знак, то a-точка перегиба функции.

Пример: Найти интервалы, на которых функция выпукла вверх и выпукла вниз, а также точки перегиба функции: $y = x^3(4 - x)$.

Из предыдущего примера: $y^{/} = 12x^2 - 4x^3$. Находим вторую производную функции с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций», получим:

$y^{//} = (12x^2 - 4x^3)^{/} = 12 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 24x - 12x^2$.

Приравняем вторую производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

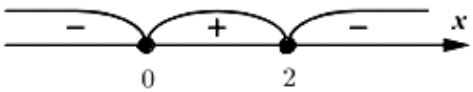
$$24x - 12x^2 = 0$$

$$12x(2 - x) = 0$$

$12x = 0$ или $2 - x = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак второй производной:

$$-1 \in (-\infty; 0): y^{//}(-1) = 24 \cdot (-1) - 12 \cdot (-1)^2 = -24 - 12 = -36$$

$-36 < 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция выпукла вверх.

$$1 \in (0; 2): y^{//}(1) = 24 \cdot 1 - 12 \cdot 1^2 = 24 - 12 = 12$$

$12 > 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция выпукла вниз.

$3 \in (2;\infty)$: $y^{//}(3) = 24 \cdot 3 - 12 \cdot 3^2 = 72 - 12 \cdot 9 = 72 - 108 = -36$

$-36 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция выпукла вверх.

При переходе через точки 0 и 2, вторая производная меняет знак, значит 0 и 2 - точки перегиба функции.

Подведем итоги:

$$y_{\text{вып.вв.}} \text{ при } x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$$

$$y_{\text{вып.вн.}} \text{ при } x \in (0; 2)$$

$x = 0, x = 2$ - точки перегиба.

7)Строим график функции.

Пример: Исследовать и построить график функции с помощью производной: $y = \frac{(x-1)^2}{x+3}$. Воспользуемся приведенным выше планом исследования:

1) Область определения.

Напомним, что на область определения функции могут накладываться следующие ограничения:

1) подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю;

2) знаменатель не равен нулю;

3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля.

В данном примере (ограничение 2) знаменатель не равен нулю) $x + 3 \neq 0$, т.е. $x \neq -3$. Можно сделать вывод, что x - любое число, кроме 0 , т.е. $D(y)$: $(-\infty;\ -3) \cup (-3; \infty)$.

2) Выяснить является ли функция четной, нечетной или общего вида.

Чтобы определить четность или нечетность функции, нужно вместо x подставить $-x$: $y(-x) = \frac{(-x-1)^2}{-x+3} = \frac{(-1)^2(x+1)^2}{3-x} = \frac{(x+1)^2}{3-x}$. Т.к. функция, не принадлежащие ни одной из категорий равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, то она является функцией общего вида.

3) Точки пересечения с осями координат и интервалы, где $y > 0, y < 0$.

Приравняем функцию к нулю и найдем корни данного уравнения:

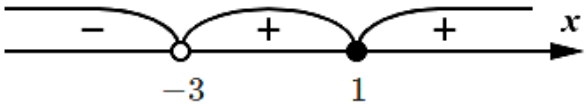
$$\frac{(x-1)^2}{x+3}=0$$

$(x-1)^2=0$ или $x+3\neq 0$

$x-1=0$ или $x\neq -3$

$x=1$ или $x\neq -3$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак функции:

$$-4\in(-\infty;-3): y(-4)=\frac{(-4-1)^2}{-4+3}=\frac{(-5)^2}{-1}=\frac{25}{-1}=-25$$

$-25<0$, следовательно функция на данном промежутке имеет знак "-" и находится ниже оси Ox.

$$0\in(-3;1): y(0)=\frac{(0-1)^2}{0+3}=\frac{(-1)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}>0$, следовательно функция на данном промежутке имеет знак "+" и находится выше оси Ox.

$$2\in(1;\infty): y(2)=\frac{(2-1)^2}{2+3}=\frac{1^2}{5}=\frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}>0$, следовательно функция на данном промежутке имеет знак "+" и находится выше оси Ox.

Найдем точки пересечения с осями координат.

С осью Ox (т. е. $y=0$)

$$\frac{(x-1)^2}{x+3}=0$$

$(x-1)^2=0$ или $x+3\neq 0$

$x-1=0$ или $x\neq -3$

$x=1$ или $x\neq -3$ (в точке $x\neq -3$ нет пересечения с осями)

С осью Oy (т. е. $x=0$)

$$y = \frac{(0-1)^2}{0+3} = \frac{(-1)^2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

Подведем итоги:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-3; 1) \cup (1; \infty)$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -3)$$

пересечение с осью Ox в точке $(1; 0)$

пересечение с осью Oy в точке $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

4) Нахождение асимптот функции.

$$y = \frac{(x-1)^2}{x+3} = \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2}{x+3} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+3}$$

$n = 2, m = 1, n = m + 1$, следовательно график имеет наклонную асимптоту $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x+1}{x+3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (напомним, что при вычислении пределов многочленов, стремящихся к бесконечности, достаточно определить многочлен старшей степени числителя и знаменателя, а остальные многочлены младшей степени отбросить).

$$b = \lim_{x\to\infty} y(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x+3} - 1 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - x(x+3)}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-3x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{x} = -5\,.$$

Наклонная асимптота имеет вид: $y = 1 \cdot x - 5$, т.е. $y = x - 5$. $x = -3$ - вертикальная асимптота (корень знаменателя).

5) Находим точки максимума и минимума функции, значение функции в них и промежутки возрастания и убывания функции.

Находим производную функции с помощью формул: $(C)^/ = 0$, $(x^\alpha)^/ = \alpha \cdot \cdot x^{\alpha-1}$, $(x)^/ = 1$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования частного функций: $\left(\frac{u}{v}\right)^/ = \frac{u^/v - uv^/}{v^2}$, суммы (разности) функций: $\left(u(x) \pm v(x)\right)^/ = u^/(x) \pm v^/(x)$:

$$y^/ = \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x+3}\right)^/ = \frac{(x^2 - 2x + 1)^/ \cdot (x+3) - (x^2 - 2x + 1) \cdot (x+3)^/}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{(2x^{2-1} - 2 \cdot 1)(x+3) - (x^2 - 2x + 1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{(2x-2)(x+3) - (x^2 - 2x + 1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - 2x - 6 - x^2 + 2x - 1}{(x+3)^2} == \frac{x^2 + 6x - 7}{(x+3)^2}$$

Приравняем производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

$$\frac{x^2 + 6x - 7}{(x+3)^2} = 0$$

$x^2 + 6x - 7 = 0$ или $(x+3)^2 \neq 0$

$$a = 1, b = 6, c = -7$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

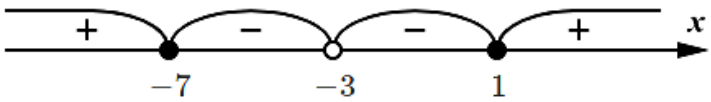
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 - 8}{2} = -\frac{14}{2} = -7$$

$$(x+3)^2 \neq 0$$

$$x + 3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак производной:

$$-8 \in (-\infty; -7): y^{/}(-8) = \frac{(-8)^2 + 6 \cdot (-8) - 7}{(-8+3)^2} = \frac{64 - 48 - 7}{(-5)^2} = \frac{9}{25}$$

$\frac{9}{25} > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

$$-4 \in (-7; -3): y^{/}(-4) = \frac{(-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 7}{(-4+3)^2} = \frac{16 - 24 - 7}{(-1)^2} = -\frac{15}{1} = -15$$

$-15 < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$$0 \in (-3;1): y^{/}(0) = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 - 7}{(0+3)^2} = \frac{-7}{(3)^2} = -\frac{7}{9}$$

$-\frac{7}{9} < 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция убывает.

$$2 \in (1;\infty): y^{/}(2) = \frac{2^2 + 6 \cdot 2 - 7}{(2+3)^2} = \frac{4 + 12 - 7}{(5)^2} = \frac{9}{25}$$

$\frac{9}{25} > 0$, следовательно, производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция возрастает.

При переходе через точку -7, производная меняет знак с "+" на "-", т.е. -7 - точка максимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(-7) = \frac{(-7-1)^2}{-7+3} = \frac{(-8)^2}{-4} = -\frac{64}{4} = -16.$

При переходе через точку 1, производная меняет знак с "-" на "+", т.е. 1 - точка минимума функции. Найдем значение функции в данной точке:

$y(1) = \frac{(1-1)^2}{1+3} = \frac{0^2}{4} = 0.$

Подведем итоги:

$$y \uparrow \text{ при } x \in (-\infty;-7) \cup (1;\infty)$$

$$y \downarrow \text{ при } x \in (-7;-3) \cup (-3;1)$$

$$x_{max} = -7, y_{max} = -16$$

$x_{min} = 1, y_{min} = 0.$

6)Находим точки перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

Из предыдущего пункта: $y^{/} = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}$. Находим вторую производную функции с помощью формулы: $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций» и правил дифференцирования частного функций:

$\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{u^{/}v - uv^{/}}{v^2}$, суммы (разности) функций: $\left(u(x) \pm v(x)\right)^{/} = u^{/}(x) \pm v^{/}(x)$:

$$y^{//} = \left(\frac{x^2 + 6x - 7}{(x+3)^2}\right)^{/} = \frac{(x^2 + 6x - 7)^{/} \cdot (x+3)^2 - (x^2 + 6x - 7) \cdot ((x+3)^2)^{/}}{((x+3)^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x^{2-1} + 6 \cdot 1)(x+3)^2 - (x^2 + 6x - 7) \cdot 2(x+3)^{2-1} \cdot (x+3)^{/}}{(x+3)^4}$$

$$= \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2 + 6x - 7) \cdot 2(x+3) \cdot 1}{(x+3)^4} =$$

$$= \frac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2 + 6x - 7)(x+3)}{(x+3)^4}$$

Приравняем вторую производную к нулю и найдем корни данного уравнения:

$$\frac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2 + 6x - 7)(x+3)}{(x+3)^4} = 0$$

$(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2 + 6x - 7)(x+3) = 0$ или $(x+3)^4 \neq 0$

Разделим данное выражение на $x + 3$:

$$\frac{(2x+6)(x+3)^2}{x+3} - \frac{2(x^2 + 6x - 7)(x+3)}{x+3} = 0$$

$$(2x+6)(x+3) - 2(x^2 + 6x - 7) = 0$$

$$2x^2 + 6x + 6x + 18 - 2x^2 - 12x + 14 = 0$$

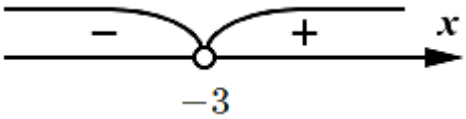
$32 \neq 0$ - решений нет.

$$(x+3)^4 \neq 0$$

$$x + 3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

Отметим точки на координатном луче и определим знаки на промежутках.



Для этого подставим любое число из каждого промежутка и определим знак второй производной:

$-4 \in (-\infty; -3)$: $y^{//}(-4)$

$$= \frac{(2 \cdot (-4) + 6)(-4+3)^2 - 2((-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 7)(-4+3)}{(-4+3)^4} =$$

$$= \frac{(-2)(-1)^2 - 2(16 - 24 - 7)(-1)}{(-1)^4} = \frac{-2 + 2 \cdot (-15)}{1} = -32$$

$-32 < 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "-", а функция выпукла вверх.

$$0 \in (-3;\infty): y^{//}(0) = \frac{(2\cdot 0+6)(0+3)^2 - 2(0^2+6\cdot 0-7)(0+3)}{(0+3)^4}$$

$$= \frac{6\cdot 3^2 - 2\cdot(-7)\cdot 3}{3^4} = \frac{96}{81} = 1\frac{5}{27}$$

$1\frac{5}{27} > 0$, следовательно, вторая производная на данном промежутке имеет знак "+", а функция выпукла вниз.

Т.к. вторая производная не имеет корней ($x \neq -3$), то точек перегиба нет.

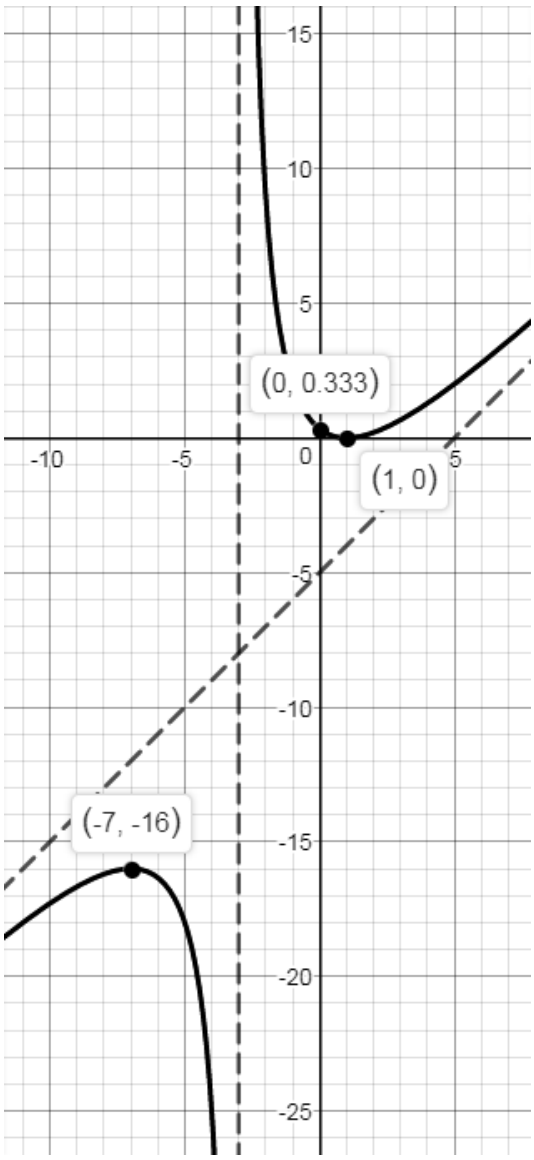
Подведем итоги:

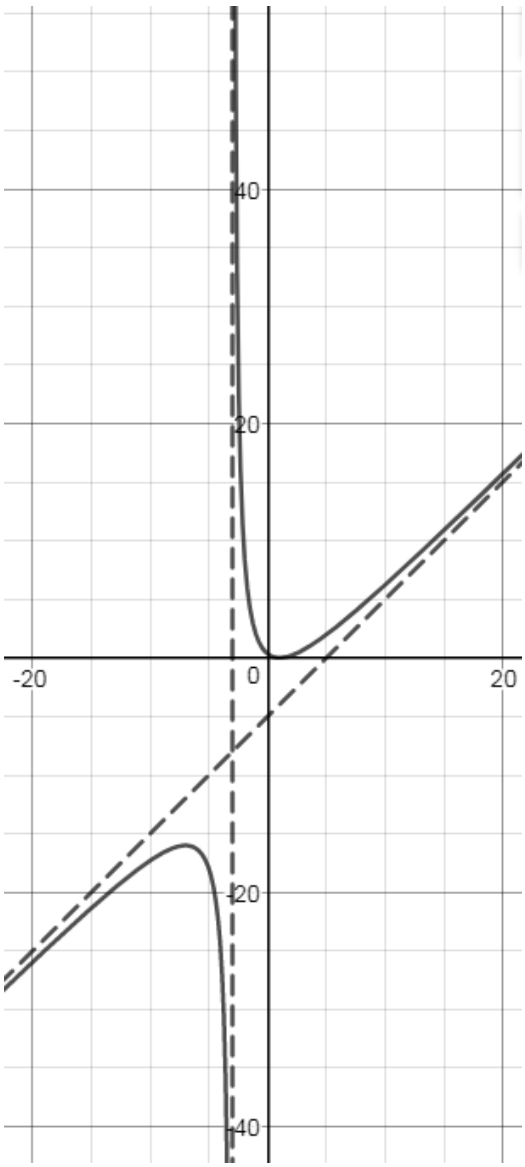
$$y_{\text{вып.вв.}} \text{ при } x \in (-\infty;-3)$$

$$y_{\text{вып.вн.}} \text{ при } x \in (-3;\infty)$$

точек перегиба нет.

7)Строим график функции (см. следующую страницу).





Время выполнения: 90 минут.

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и асимптоты графика функции: 1) $y = \frac{x^2+3x+3}{x^2+2x+2}$ 2) $y = \frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданном отрезке: 1) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ на $[-2; 4]$ 2)$y = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 4$ на $[-4; 2]$.

3. Исследовать функцию и построить график функции с помощью производной: $y = (x-1)^2(x-4)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №15

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Производная и дифференциал».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Производная и дифференциал».

Проверочная работа № 4 по теме: «Производная и дифференциал».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 5 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 4 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 3 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 3 заданий.

В-1

1. Найти производную: а) $y = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{7}$ б) $y = (6 - 3x)^7$ в) $y = \frac{tg7x}{5sin6x}$

г) $y = (x^2 - 1)(x + 5)^2$ д) $y = \sqrt[3]{arccos\ 9x}$.

2. Найти дифференциал функции $y = x^3(x^2 - 1)$ в точке x_0=1 при $\Delta x = 0{,}3$ и вычислить приближенно $y(1{,}3)$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{6x}{x-1}$ в точке x_0=2.

4. С помощью правила Лопиталя вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{20}-1}{x^{60}-1}$.

б) $\lim_{x\to 2} \frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{lnx}{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+ln(1+x)}{e^{3x}-1}$.

5. Провести полное исследование функции и построить график: $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

В-2

1. Найти производную: а) $y = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt{15}$ б) $y = (6x + 4)^5$ в) $y = \frac{sin3x}{2cos2x}$

г) $y = (x^3 + 7)(2 - x)^2$ д) $y = \sqrt[4]{arcsin\ 6x}$.

2. Найти дифференциал функции $y = x^4(x^3 + 3)$ в точке x_0=0 при $\Delta x = 0{,}4$ и вычислить приближенно $y(0{,}4)$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{x+2}{x}$ в точке x_0=2.

4. С помощью правила Лопиталя вычислить: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^{15}}{x^{20}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\sin x}{lnx}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+4x-3}{2x^3+5x^2-x-6}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin2x-2arcsinx}{x^3}$.

5. Провести полное исследование функции и построить график: $y=\frac{(x-1)^2}{x+3}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Вычисление неопределенных интегралов.

Цель: Научиться находить первообразные функций, определенные и неопределенные интегралы, вычислять двойные и тройные интегралы.

Неопределенный интеграл.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F^{/}(x)=f(x)$.

Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределённого интеграла, а сам процесс называется интегрированием.

Таблица неопределенных интегралов

Функция $y=f(x)$	Первообразная $y=f(x)$
$\int 1dx$	$x+C$
$\int x^{\alpha}\,dx,$ где$\alpha\in N,\alpha\neq -1,(\alpha-$ число$)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx$	$ln\,x+C$
$\int e^{x}dx$	$e^{x}+C$
$\int\sin xdx$	$-cos\,x+C$
$\int\cos xdx$	$sin\,x+C$
$\int\frac{1}{sin^2x}dx$	$-ctgx+C$
$\int\frac{1}{cos^2x}dx$	$tgx+C$

$\int (kx+b)^p\,dx,$ где $p \neq -1, k \neq 0, (p, k -$ числа$)$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\int \frac{1}{(kx+b)}\,dx,$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$\frac{1}{k} ln(kx+b) + C$
$\int e^{kx+b}\,dx,$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\int \sin(kx+b)dx$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$-\frac{1}{k} cos(kx+b) + C$
$\int \cos(kx+b)dx$ где $k \neq 0$, $(k -$ число$)$	$\frac{1}{k} sin(kx+b) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$arcsinx + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx$	$arctgx + C$
$\int a^x dx$,где $(a -$ число$)$	$\frac{a^x}{lna} + C$
$\int \mathrm{ch}x dx$	$\mathrm{sh}\,x + C$
$\int \mathrm{sh}x dx$	$\mathrm{ch}\,x + C$
$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}dx$	$\mathrm{th}\,x + C$
$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx$	$-\mathrm{cth}\,x + C$
$\int tgx dx$	$-ln\lvert cosx\rvert + C$
$\int ctg\,x dx$	$ln\lvert sinx\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx,$ где$(a -$ число$)$	$\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx,$ где$(a -$ число$)$	$\frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}\,dx,$ где$(a -$ число$)$	$\frac{1}{2} ln\lvert x^2 \pm a^2\rvert + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$, где($a$ – число)	$ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} dx$, где($a$ – число)	$arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$, где($a$ – число)	$\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} dx$, где($a$ – число)	$-\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, где($a$ – число)	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$, где($a$ – число)	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$

Пример: Для функции $\cos x$ найти такую первообразную функцию $F(x)$, что $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10$.

По «Таблице неопределенных интегралов» найдем первообразную $\cos x$: $F(x) = sin\, x + C$ и подставим значения условия $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10$, получим (напомним, что по таблице значений углов тригонометрических функций $sin\frac{\pi}{2} = 1$):

$$10 = sin\frac{\pi}{2} + C$$

$$10 = 1 + C$$

$C = 9$, т.е. искомая первообразная имеет вид: $F(x) = sin\, x + 9$.

Пример: Найти неопределенные интегралы: а) $\int \frac{3x^2-2x+5}{x} dx$ б) $sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$ в) $tg^2 x dx$.

а) $\int \frac{3x^2-2x+5}{x} dx$

Для начала упростим данное выражение (почленно разделим числитель на x): $\int \frac{3x^2-2x+5}{x} dx = \int \left(\frac{3x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{5}{x}\right) dx = \int \left(3x - 2 + 5\frac{1}{x}\right) dx$

Находим интегралы с помощью формул: $\int 1dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + C$ из«Таблицы неопределенных интегралов», получим:

$\int \left(3x - 2 + 5\frac{1}{x}\right) dx = 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + 5 \cdot ln\, x + C = \frac{3x^2}{2} - 2x + 5\, ln\, x + C.$

б) $sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Для начала упростим данное выражение (воспользуемся формулой половинного угла функции $sin\, x$: $sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$):

$$\int sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{1-\cos x}{2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right) dx$$

Находим интегралы с помощью формул: $\int 1dx = x + C$, $\int \cos x\, dx = = sin\, x + \mathrm{C}$ из«Таблицы неопределенных интегралов», получим:

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} sin\, x + \mathrm{C}.$

в) $tg^2 x dx$

Для начала упростим данное выражение (воспользуемся тригонометрическим тождеством: $tg^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$):

$$\int tg^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$

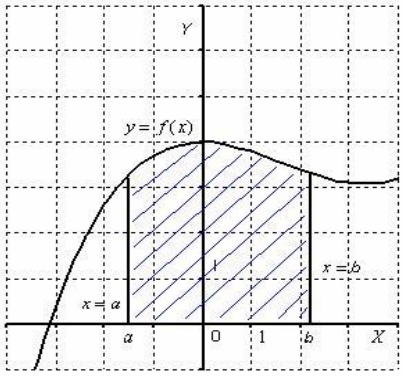
Находим интегралы с помощью формул:

$\int 1dx = x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + \mathrm{C}$ из«Таблицы неопределенных интегралов», получим: $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = tgx - x + \mathrm{C}.$

Определенный интеграл и его приложения.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ох, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, находят по формуле Ньютона-Лейбница: $S = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b)$.

С точки зрения геометрии определенный интеграл – это площадь фигуры.



Пример: Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

а) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$

б) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$

в) $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{2\pi}{3}, f(x) = sin\, x$

а) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$

Чтобы найти определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$S = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b)$, надо: найти неопределенный интеграл с помощью формулы: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», подставить значение верхней границы и вычесть значение нижней.

$\int_2^4 x^3 dx = \left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)|_2^4 = \left(\frac{x^4}{4}\right)|_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60.$

б) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$

Чтобы найти определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$S = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b)$, надо: найти неопределенный интеграл с помощью формул: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и $\int 1 dx = x + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», подставить значение верхней границы и вычесть значение нижней.

$\int_{-2}^1 (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + x\right)|_{-2}^1 = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)|_{-2}^1 = \frac{1^3}{3} + 1 - \frac{(-2)^3}{3} - (-2) = \frac{1}{3} +$
$+ \frac{8}{3} + 3 = \frac{9}{3} + 3 = 3 + 3 = 6.$

в) $a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{2\pi}{3}, f(x) = sin\, x$

Чтобы найти определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$S = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = F(a) - F(b)$, надо: найти неопределенный интеграл с помощью формулы: $\int \sin x\, dx = -cos\, x + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов», подставить значение верхней границы и вычесть значение нижней. (напомним, что по таблице значений углов тригонометрических функций $cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$):

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} sin\, x\, dx = -cos\, x\, |_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -cos\frac{2\pi}{3} - \left(-cos\frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Пример: Вычислить интегралы: а) $\int_0^1 xdx$б) $\int_{-1}^2 3x^2dx$в) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ г) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

а) $\int_0^1 xdx = \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)|_0^1 = \left(\frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ (здесь использовалась формула: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$).

б) $\int_{-1}^2 3x^2dx = 3 \cdot \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)|_{-1}^2 = 3 \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)|_{-1}^2 = (x^3)|_{-1}^2 = 2^3 - (-1)^3 = 9$

(здесь использовалась формула: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, напомним, что число можно выносить за знак интеграла).

в) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^3 x^{-2}dx = \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)|_2^3 = \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)|_2^3 = \left(-\frac{1}{x}\right)|_2^3 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$

(здесь использовалась формула: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, напомним одно из свойств степеней $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, т.е. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$).

г)$\int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)|_1^4 = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)|_1^4 = \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)|_1^4 = \frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3} =$

$= \frac{2\sqrt{64}}{3} - \frac{2\sqrt{1}}{3} = \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ (здесь использовалась формула:

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, напомним, что корень всегда можно представить в виде степени с рациональным показателем, т.е. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

Двойные интегралы.

Определение двойного интеграла. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ обозначается как $\iint_R f(x, y)dA$, гдеR- область интегрирования в плоскостиOxy.

Определение1. Говорят, что областьRна плоскости относится ктипу 1 или являетсяэлементарной относительно осиOy, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих отx, и описывается множеством:

$$R = \{(x, y),\ \ a \le x \le b,\ \ p(x) \le y \le q(x)\}$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде: $\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dydx$(рисунок1).

Определение2. Говорят, что область R на плоскости относится ктипу2или являетсяэлементарной относительно оси Ox, если она лежит между графиками двух непрерывных функций, зависящих от y, и описывается множеством:

$$R = \{(x,y),\quad u(y) \le x \le v(y),\quad c \le y \le d\}.$$

Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в данной области выражается через повторный интеграл в виде: $\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$(рисунок2).

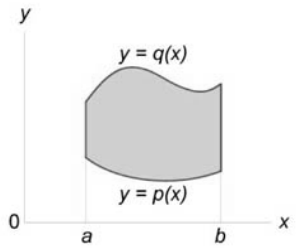


рисунок1

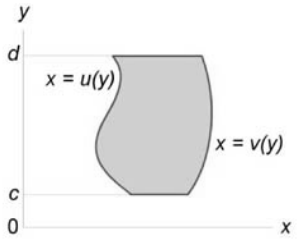


рисунок2

Пример: Вычислить интегралы: а) $\int_0^1 \int_1^2 xydydx$б)$\int_0^1 \int_y^{y^2} (x+2y)\, dxdy$

в)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y)dxdy.$

а) $\int_0^1 \int_1^2 xydydx$

Вычисление данного двойного интеграла сводится к нахождению двух определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной y (x считается константой, здесь воспользуемся формулой: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$):

$$\int_1^2 xydy = x\left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right)\Big|_1^2 = x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = x\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = x\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x.$$

Найдем внешний интеграл по переменной x, подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^1 \frac{3}{2}xdx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

б)$\int_0^1 \int_y^{y^2} (x+2y)\, dxdy$

Вычисление данного двойного интеграла сводится к нахождению двух определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной x(yсчитается константой, здесь воспользуемся формулами: $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и $\int 1\,dx = x + C$):

$$\int_{y}^{y^2}(x+2y)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)|_{y}^{y^2} = \frac{(y^2)^2}{2} + 2yy^2 - \frac{y^2}{2} - 2yy = \frac{y^4}{2} + 2y^3 -$$

$$-\frac{y^2}{2} - 2y^2 = \frac{y^4}{2} + 2y^3 + \frac{-y^2-4y^2}{2} = \frac{y^4}{2} + 2y^3 - \frac{5y^2}{2} = \frac{1}{2}y^4 + 2y^3 - \frac{5}{2}y^2.$$

Найдем внешний интеграл по переменной y, подставив в него найденное выражение:

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}y^4 + 2y^3 - \frac{5}{2}y^2\right)\,dy = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{y^5}{5} + 2\cdot\frac{y^4}{4} - \frac{5}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)|_{0}^{1} = \left(\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{2} - \frac{5y^3}{6}\right)|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1^5}{10} + \frac{1^4}{2} - \frac{5\cdot 1^3}{6} - \frac{0^5}{10} - \frac{0^4}{2} + \frac{5\cdot 0^3}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3+15-25}{30} = -\frac{7}{30}.$$

в)$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y)dxdy$

Вычисление данного двойного интеграла сводится к нахождению двух определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной x(yсчитается константой, здесь воспользуемся формулами:

$\int \cos(kx+b)\;dx = \frac{1}{k}sin(kx+b) + C$, $\int \cos x\,dx = sin\,x + \mathrm{C}$,

$\int \sin x\,dx = -\cos x + \mathrm{C}$):

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(x+y)dx = \left(\frac{1}{1}sin(x+y)\right)|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \big(sin(x+y)\big)|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right) -$$

$-sin(0+y) = \cos y - \sin y$ (напомним, что по формуле привидения $sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$).

Найдем внешний интеграл по переменной y, подставив в него найденное выражение:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos y - \sin y)\;dy = \big(\sin y - (-\cos y)\big)|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = (\sin y + \cos y)|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \cos 0 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ (напомним, что по таблице значений углов тригонометрических функций $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos 0 = 1$).

Тройные интегралы.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Рассмотрим случай, когда область интегрированияUявляется элементарной относительно осиOz, т.е. любая прямая, параллельная осиOz, пересекает границу области U не более, чем в двух точках. Пусть область U ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$, (рисунок1). Проекцией тела U на плоскость Oxy является область D (рисунок2). Будем предполагать, что функции$z_1(x, y)$,и $z_2(x, y)$непрерывны в областиD.

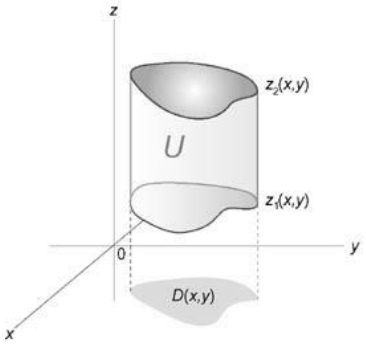


рисунок1

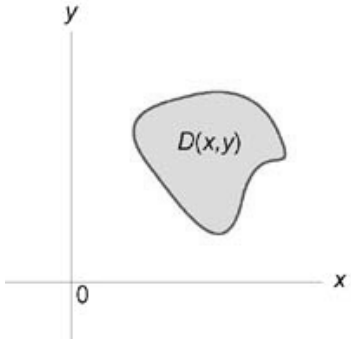


рисунок2

Тогда для любой непрерывной в области U функции $f(x, y, z)$ можно записать соотношение: $\iiint_U f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dA.$

Пример: Вычислить интегралы: а) $\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyzdxdydz$

б)$\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} (1 - x)dzdydx$в)$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^3dzdydx.$

а) $\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyzdxdydz$

Вычисление данного тройного интеграла сводится к нахождению трех определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной x (y, z считается константой, здесь воспользуемся формулой: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$):

$\int_0^y xyzdx = yz\left(\frac{x^2}{2}\right)|_0^y = yz\left(\frac{y^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = yz \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}y^3z.$

Найдем следующий интеграл по переменной y (z считается константой), подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^z \left(\frac{1}{2}y^3 z\right) dy = \left(\frac{1}{2}z \cdot \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^z = \left(\frac{y^4 z}{8}\right)\Big|_0^z = \frac{z^4 z}{8} - \frac{0^4 z}{8} = \frac{z^5}{8} = \frac{1}{8}z^5$$

Найдем внешний интеграл по переменной z, подставив в него найденное выражение: $\int_0^2 \left(\frac{1}{8}z^5\right) dz = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{z^6}{6}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{z^6}{48}\right)\Big|_0^2 = \frac{2^6}{48} - \frac{0^6}{48} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

б)$\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} (1-x) dz dy dx$

Вычисление данного тройного интеграла сводится к нахождению трех определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной z (x, y считается константой, здесь воспользуемся формулами: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и $\int 1\, dx = x + C$):

$$\int_0^{6-3x-2y} (1-x) dz = (1 \cdot z - x \cdot z)\Big|_0^{6-3x-2y} = (z - xz)\Big|_0^{6-3x-2y} =$$

$$= 6 - 3x - 2y - x(6 - 3x - 2y) - 0 + x \cdot 0 = 6 - 3x - 2y - 6x + 3x^2 + 2xy =$$

$$= 6 - 9x - 2y + 3x^2 + 2xy.$$

Найдем следующий интеграл по переменной y(x считается константой), подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6 - 9x - 2y + 3x^2 + 2xy)\, dy =$$

$$= \left(6y - 9xy - 2\frac{y^2}{2} + 3x^2 y + 2x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} =$$

$$= (6y - 9xy - y^2 + 3x^2 y + xy^2)\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} =$$

$$= 6\left(3 - \frac{3}{2}x\right) - 9x\left(3 - \frac{3}{2}x\right) - \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 + 3x^2\left(3 - \frac{3}{2}x\right) + x\left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 =$$

$$= 6 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{3}{2}x - 9x \cdot 3 + 9x \cdot \frac{3}{2}x - \left(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}x + + \left(\frac{3}{2}x\right)^2\right) + 3x^2 \cdot 3 -$$

$$-3x^2 \cdot \frac{3}{2}x + x\left(3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}x\right)^2\right) = 18 - 9x - 27x + \frac{27}{2}x^2 - \left(9 - 9x +\right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}x^2\right) + 9x^2 - \frac{9}{2}x^3 + x\left(9 - 9x + \frac{9}{4}x^2\right) = 18 - 9x - 27x + \frac{27}{2}x^2 - 9 + 9x -$$

$-\frac{9}{4}x^2+9x^2-\frac{9}{2}x^3+9x-9x^2+\frac{9}{4}x^3=18-27x+\frac{27}{2}x^2-9+9x-\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{2}x^3+$
$+\frac{9}{4}x^3=9-18x+\frac{54-9}{4}x^2+\frac{-18+9}{4}x^3=9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3.$

Найдем внешний интеграл по переменной x, подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^2\left(9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3\right)dx=\left(9x-18\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{45}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right)|_0^2=$$

$$=\left(9x-9x^2++\frac{15x^3}{4}-\frac{9x^4}{16}\right)|_0^2$$

$$=9\cdot2-9\cdot2^2+\frac{15\cdot2^3}{4}-\frac{9\cdot2^4}{16}-9\cdot0+9\cdot0^2-$$

$$-\frac{15\cdot0^3}{4}+\frac{9\cdot0^4}{16}=18-9\cdot4+\frac{15\cdot8}{4}-\frac{9\cdot16}{16}=18-36+30-9=3$$

в)$\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}xy^2z^3dzdydx$

Вычисление данного тройного интеграла сводится к нахождению трех определенных интегралов. Найдем внутренний интеграл по переменной z (x,y считается константой, здесь воспользуемся формулой: $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$):

$$\int_0^{xy}xy^2z^3dz=xy^2\left(\frac{z^4}{4}\right)|_0^{xy}=xy^2\left(\frac{(xy)^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)=xy^2\left(\frac{x^4y^4}{4}\right)=\frac{x^5y^6}{4}=\frac{1}{4}x^5y^6$$

Найдем следующий интеграл по переменной y(x считается константой), подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^x\left(\frac{1}{4}x^5y^6\right)\,dy=\frac{1}{4}x^5\left(\frac{y^7}{7}\right)|_0^x=\frac{1}{4}x^5\left(\frac{x^7}{7}-\frac{0^7}{7}\right)=\frac{1}{4}x^5\left(\frac{x^7}{7}\right)=\frac{x^{12}}{28}=\frac{1}{28}x^{12}.$$

Найдем внешний интеграл по переменной x, подставив в него найденное выражение:

$$\int_0^1\left(\frac{1}{28}x^{12}\right)dx=\frac{1}{28}\left(\frac{x^{13}}{13}\right)|_0^1=\frac{1}{28}\left(\frac{1^{13}}{13}-\frac{0^{13}}{13}\right)=\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{364}.$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Для функции $f(x)$ найдите такую первообразную функцию $F(x)$, что $F(0)=-4$: 1) e^x 2) $2x$ 3) $\frac{1}{cos^2x}$.

2. С помощью таблиц неопределенных интегралов найти: 1) $\int \sin x\, dx$2) $\int 2^x dx$ 3) $\int \sqrt{x} dx$ 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$5) $\int \frac{dx}{x^2+9}$ 6) $\int \frac{dx}{x^2+3}$ 7) $\int \frac{dx}{x^2-9}$ 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$9) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$ 11) $\int \sqrt{9-x^2} dx$ 12) $\int \sqrt{x^2+9} dx$ 13) $\int \operatorname{sh} x\, dx$14) $\int \sqrt[3]{27x}\, dx$ 15) $\int \frac{3\cdot 2^x+3^x}{2^x} dx$ 16) $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$17) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a, x = b$осью Ox и графиком функции$y = f(x)$: 1)$a = 3, b = 4, f(x) = x^2$2)$a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$3) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = cos\, x$.

4. Вычислить определенный интеграл: 1) $\int_0^3 x^2 dx$ 2) $\int_{-2}^3 2x dx$ 3) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$ 4) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 5) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ 6) $\int_0^{ln\, 2} e^x dx$ 7) $\int_{-\pi}^{2\pi} cos\, x\, dx$ 8) $\int_{-2\pi}^{\pi} sin\, x\, dx$ 9) $\int_{-2\pi}^{\pi} sin\, 2x\, dx$ 10) $\int_{-3\pi}^{0} cos 3\, x\, dx$ 11) $\int_{-3}^2 (2x-3) dx$ 12) $\int_{-2}^{-1} (5-4x) dx$ 13) $\int_{-1}^2 (1-3x^2) dx$ 14) $\int_{-1}^1 (x^2+1) dx$ 15) $\int_0^2 (3x^2-4x+5) dx$16)$\int_0^4 \left(x - 3\sqrt{x}\right) dx$17)$\int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$18)$\int_0^2 e^{3x}\, dx$19) $\int_1^3 2e^{2x}\, dx$.

5. Вычислить двойной интеграл: 1) $\int_0^1 \int_2^4 xy dx dy$2) $\int_0^2 \int_1^5 xy^2 dx dy$3)$\int_1^2 \int_2^3 (x - y^2)\, dx dy$.

6. Вычислить тройной интеграл: 1) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{y^2} dz dy dx$ 2)$\int_{-1}^1 \int_0^{3-x} \int_0^{1-x^2} dz dy dx$3) $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} \int_0^{y^{15x}} dz dx dy$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №17

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Интегралы».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Интегралы».

Проверочная работа № 5 по теме: «Интегралы».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 5 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 4 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 3 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 3 заданий.

В-1

1. Найти первообразную функции:

а) $f(x) = 3x^3 - 4x^2$б) $f(x) = 2\sin x + x^2$в) $f(x) = \sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

2. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}dx$б) $\int \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}dx$в) $\int \cos x + \sqrt{6x-2}dx$.

3. Вычислить определенные интегралы:

а)$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$б)$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$в) $\int_{-2}^0 x^5 - 3x^2 dx$.

4. Вычислить двойной интеграл:

а)$\int_0^2 \int_0^1 (x+y)dxdy$ б) $\int_0^1 \int_x^{2x} x\, dydx$в) $\int_1^2 \int_0^{2-x} y\, dydx$.

5. Вычислить тройной интеграл: $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+2y+4z)dzdydx$

В-2

1. Найти первообразную функции:

а) $f(x) = 5x^4 + 7x^3$б) $f(x) = x^3 - 3\cos x$в) $f(x) = \sin 5x + \frac{1}{9}\cos 9x$.

2. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int 2\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}dx$б) $\int \frac{1}{x^4} - \frac{6}{x^3}dx$в) $\int \operatorname{tg} x + \sqrt{3x+6}dx$.

3. Вычислить определенные интегралы:

а)$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$б)$\int_0^{3\pi/2} \sin x\, dx$в) $\int_{-2}^0 2x^4 - 5x\, dx$.

4. Вычислить двойной интеграл:

а)$\int_0^1 \int_{-1}^0 (x+y^2)dxdy$ б) $\int_0^2 \int_x^{2+x} x\, dydx$в) $\int_1^3 \int_0^{3x} y\, dydx$.

5. Вычислить тройной интеграл: $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^2 (2x+y-4z)dzdydx$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Решение линейных дифференциальных уравнений 1 порядка.

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения 1 порядка.

Определения и понятия теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, в которое входит неизвестная функция под знаком производной или дифференциала. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае содержит:

1) независимую переменнуюx

2) зависимую переменнуюy

3) первую производную функции: $y^{/}$.

Общее решение дифференциального уравнения – это множество решений, содержащее все без исключения решения этого дифференциального уравнения.

Если решение дифференциального уравнения удовлетворяет изначально заданным дополнительным условиям, то его называют частным решением дифференциального уравнения.

Задача Коши – это задача нахождения частного решения дифференциального уравнения$y = \varphi(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$y_0 = \varphi(x_0)$, где x_0 - заданная точка на интервале $(a; b)$, y_0 - заданное значение искомой функции.

Пример: Убедитесь, что функция $y = x^2 + 1$ является решением дифференциального уравнения $y^{/} = (x+1)^2 - y$ на любом интервале $(a; b)$.

Найдем производную функции с помощью формул: $(C)^{/} = 0$, $(x^{\alpha})^{/} = \alpha \cdot \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций»: $y^{/} = (x^2+1)^{/} = 2x$. Подставим производную и функцию $y = x^2 + 1$ в дифференциальное уравнение $y^{/} = (x+1)^2 - y$, получим:

$$2x = (x+1)^2 - (x^2+1)$$

$$2x = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 1$$

$2x = 2x$, т.к. получилось тождество, справедливое для любых x на интервале $(a; b)$, то функция $y = x^2 + 1$ является решением дифференциального уравнения $y^/ = (x + 1)^2$.

Пример: Убедитесь, что функция $y = \sin x + C$ является общим решением дифференциального уравнения $y^/ - \cos x = 0$.

Найдем производную функции с помощью формул: $(C)^/ = 0$, $(\sin x)^/ = = \cos x$ из таблицы «Производных основных элементарных функций»: $y^/ = = (\sin x + C)^/ = \cos x$. Подставим производную и функцию $y = \sin x + C$ в дифференциальное уравнение $y^/ - \cos x = 0$, получим: $\cos x - \cos x = 0 . 0 = 0$, т.к. получилось тождество, справедливое для любых x, то функция $y = \sin x + C$ является решением дифференциального уравнения $y^/ - \cos x = 0$.

Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.

Общее решение дифференциальных уравнений вида $y^/ = f(x)$ задается формулой $y = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная. Решение получается на каждом интервале непрерывности функции $f(x)$ со своей произвольной постоянной.

Пример: Найти общее решение дифференциального уравнения $y^/ = \frac{1}{x}$.

Функция $\frac{1}{x}$имеет два интервала непрерывности: $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$. Для того чтобы найти общее решение дифференциального уравнения найдем первообразную функции по формуле: $\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»: $y = ln|x| + C,\ x \neq 0$.

Уравнения $y^/ = f(y)$ приводится к виду $x^/ = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ и находится общее решение $x = \varphi(y, C)$. Общий интеграл исходного уравнения получится после присоединения к множеству решений вида $y = y_k$, где $f(y_k) = 0$, $k = 1,2 \ldots m$.

Пример: Решить уравнение: а) $y^/ = e^y$ б) $y^/ = y^2 - 1$.

а) $y^/ = e^y$

С помощью формулы $x^/ = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ приводим уравнение к виду:

$x^{/} = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{e^{y}} = e^{-y}$ и находим его общее решение по формуле: $\int e^{kx+b}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$x = \int e^{-y}dy = \frac{1}{-1}e^{-y} + C = -e^{-y} + C$. $e^{y} = 0$ не имеет корней, значит общим решением данного дифференциального уравнения будет только $x = -e^{-y} + C$.

б) $y^{/} = y^{2} - 1$

С помощью формулы $x^{/} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ приводим уравнение к виду:

$x^{/} = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{y^{2}-1}$ и находим его общее решение по формуле: $\int \frac{1}{x^{2}-a^{2}}dx = = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$x = \int \frac{1}{y^{2}-1}dy = \frac{1}{2\cdot 1}ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C = \frac{1}{2}ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$. $y^{2} - 1 = 0$, $y^{2} = 1$, $y = \pm 1$. Общим решением данного дифференциального уравнения будет $x = \frac{1}{2}ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$ и $y = \pm 1$.

Время выполнения: 90 минут.

1. Доказать, что функция $y = tgx$ является решением дифференциального уравнения $y^{/} = 1 + y^{2}$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Доказать, что функция $y = e^{\alpha x}$, где α- любое число, является решением дифференциального уравнения$y^{/} - \alpha y = 0$ на любом интервале.

3. Доказать, что функция $y = x^{2} + C$ является общим решением дифференциального уравнения $y^{/} = 2x$ на любом интервале.

4. Доказать, что функция $y = e^{3x} + C$ является общим решением дифференциального уравнения $y^{/} = 3e^{3x}$ на любом интервале и найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$.

5. Доказать, что функция $y = arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$ является общим решением дифференциального уравнения $y^{/} = \frac{2}{x^{2}+4}$ на любом интервале и найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(2) = \pi$.

6. Найдите общее решение дифференциальных уравнений с указанием интервалов, на которых формула, дающая общее решение, справедлива: 1) $y^{/} = 1 + x^2$ 2) $y^{/} = e^{4x}$ 3) $y^{/} = sin(3x)$ 4) $y^{/} = 1 + tg^2x$ 5) $y^{/} = \frac{x}{x^2+1}$ 6) $y^{/} = \frac{x}{x^2-1}$.

7. Решите задачу Коши для уравнений при $y(0) = 0$: 1) $y^{/} = \frac{1}{x^2+1}$ 2) $y^{/} = e^{-x} + x$.

8. Найдите общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y^{/} = 1 + y^2$2) $y^{/} = e^{6y}$ 3)$y^{/} = \frac{1+y^2}{y}$ 4)$y^{/} = \frac{1}{1+tg^2y}$ 5) $y^{/} = y^2 - 5y + 4$.

9. Решите задачу Коши для уравнения $y^{/} = 4y$ при $y(0) = 1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Цель: Научиться решать дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными, дифференциальные уравнения высших порядков, линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными и разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения $f(y)dy = g(x)dx$ называют уравнениями с разделенными переменными. Название этого вида дифференциальных уравнений достаточно показательно: выражения, содержащие переменные xи y, разделены знаком равенства, то есть, находятся по разные стороны от него.

Общим интегралом уравнения с разделенными переменными является равенство$\int f(y)dy = \int g(x)dx$. Если интегралы из этого равенства выражаются в элементарных функциях, то мы можем получить общее решение

дифференциального уравнения как неявно заданную функцию $\Phi(x, y) = 0$, а иногда получается выразить функцию yв явном виде.

Пример: Решить уравнение: а) $3x^2dx - \frac{2y}{1+y^2}\ dy = 0$

б) $cos\,x\ \ dx - tg\ y\ dy = 0.$

а) $3x^2dx - \frac{2y}{1+y^2}\ dy = 0$

С помощью формулы $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ приводим уравнение к виду:

$3x^2dx = \frac{2y}{1+y^2}\ dy$, $\int 3x^2dx = \int \frac{2y}{1+y^2}\ dy$ и находим его общее решение по формулам $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\int \frac{x}{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} ln|x^2 \pm a^2| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$$3 \cdot \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} ln|1 \pm y^2|\right) + C$$

$$3 \cdot \frac{x^3}{3} = ln|1 \pm y^2| + C$$

$$x^3 = ln|1 \pm y^2| + C$$

$C = x^3 - ln|1 \pm y^2|$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

б) $cos\,x\ \ dx - tg\ y\ dy = 0.$

С помощью формулы $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ приводим уравнение к виду: $cos\,x\ \ dx = tg\ y\ dy$, $\int cos\,x\ \ dx = \int tg\ y\ dy$ и находим его общее решение по формулам $\int \cos x\, dx = sin\,x + C$, $\int tgx\, dx = -ln|cosx| + C$ из «Таблицы неопределенных интегралов»: $sin\,x = -ln|cosy| + C$.

$C = sin\,x + ln|cosx|$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

В дифференциальных уравнениях $f_1(y) \cdot g_1(x)\ dy = f_2(y) \cdot g_2(x)\ dx$ или $f_1(y) \cdot g_1(x) \cdot y^{/} = f_2(y) \cdot g_2(x)$ переменные могут быть разделены, проведением преобразований. Такие ДУ называютсядифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Соответствующее ДУ с разделенными переменными запишется как$\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\ dy = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}\ dx$.

Прежде чем продолжить, напомним, что $y^{/} = \frac{dy}{dx}$когдаyявляется функцией аргументаx.

Пример: Решить уравнение: а) $2x(1-y^2)dx - 2y(1-x^2)\,dy = 0$

б) $y^{/} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

а) $2x(1-y^2)dx - 2y(1-x^2)\,dy = 0$

Для начала преобразуем выражение:

$$2x(1-y^2)dx = 2y(1-x^2)\,dy$$

$$\frac{2x}{(1-x^2)}dx = \frac{2y}{(1-y^2)}\,dy$$

$$-\frac{2x}{(x^2-1)}dx = -\frac{2y}{(y^2-1)}\,dy$$

С помощью формулы $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ приводим уравнение к виду:

$\int -\frac{2x}{(x^2-1)}dx = \int -\frac{2y}{(y^2-1)}\,dy$ и находим его общее решение по формуле

$\int \frac{x}{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}ln|x^2 \pm a^2| + C$из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$$-2 \cdot \left(\frac{1}{2}ln|x^2-1|\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}ln|y^2-1|\right) + C$$

$$-ln|x^2-1| = -ln|y^2-1| + C$$

$C = -ln|x^2-1| + ln|1 \pm y^2|$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

б) $y^{/} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

Для начала преобразуем выражение (напомним, что$y^{/} = \frac{dy}{dx}$):

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

С помощью формулы $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ приводим уравнение к виду:

$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ и находим его общее решение по формуле

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsinx + C$из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$$arcsiny = -arcsinx + C$$

$C = arcsiny + arcsinx$ - общее решение данного дифференциального уравнения.

Уравнения высших порядков. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения вида $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ решается с помощью n-кратного последовательного интегрирования исходного уравнения.

Пример: Найти общее решение уравнения: $y^{IV} = \cos x$.

Чтобы получить общее решение уравнения проинтегрируем его 4 раза по формулам $\int \cos x\, dx = sin\, x + C$, $\int \sin x\, dx = -cos\, x + C$, $\int 1\ dx = x + C$, $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$из «Таблицы неопределенных интегралов»:

$$y^{///} = \int \cos x\, dx = sin\, x + C_1$$

$$y^{//} = \int (sin\, x + C_1)\, dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

$$y^{/} = \int (-\cos x + C_1 x + C_2)\, dx = -\, sin\, x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 =$$

$$= -\, sin\, x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

$$y = \int \left(-\, sin\, x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3\right) dx =$$

$$= -(-cos\, x) + \frac{C_1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 = \cos x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$$

Поскольку C_1 и C_2 - произвольные постоянные, вместо $\frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2$ можно писать просто $C_1x^3 + C_2x^2$, и форма общего решения упрощается:

$y = \cos x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.

Уравнения вида $y^n + h_1y^{n-1} + h_2y^{n-2} + \cdots + h_{n-1}y^/ + h_ny = 0$, где $h_1, h_2 \dots h_n$ - постоянные числа, называются линейными однородными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения надо решить характеристическое уравнение: $\lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + h_2\lambda^{n-2} + \cdots + h_{n-1}\lambda + h_n = 0$.

1) Если корни уравнения различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x} + \cdots + C_ne^{\lambda_nx}$$

Пример: Найти общее решение уравнения: $y^{//} - 2y^/ - 3y = 0$.

Решаем характеристическое уравнение ($y^/ = \lambda$):

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = -3$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Подставим корни уравнения в формулу $y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x} + \cdots + C_ne^{\lambda_nx}$ и получим общее решение: $y = C_1e^{-1\cdot x} + C_2e^{3\cdot x} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.

2) Если уравнение имеет совпавшие корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_k = \omega$, то эта группа корней имеет общее решение: $y = (C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})e^{\omega x}$

Пример: Найти общее решение уравнения: $y^{//} - 6y^/ + 9y = 0$.

Решаем характеристическое уравнение ($y^/ = \lambda$):

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$a = 1, b = -6, c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Подставим корни уравнения в формулу $y = (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})e^{\omega x}$ и получим общее решение: $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$.

3) Если характеристическое можно привести к виду: $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2 = 0$, то общее решение имеет вид: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.

Пример: Найти общее решение уравнения: $y^{//} - 4y^{/} + 13y = 0$.

Решаем характеристическое уравнение ($y^{/} = \lambda$):

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = 13$$

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 < 0$ - корней нет.

Т.к. с помощью дискриминанта не получилось решить данное уравнение, выделим полный квадрат разности и воспользуемся формулой: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\lambda^2 - 2 \cdot 2 \cdot \lambda + 2^2 - 2^2 + 13 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 - 2^2 + 13 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 - 4 + 13 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 + 9 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 + 3^2 = 0$$

Таким образом $\alpha = 2,\ \beta = 3$.

Подставим корни уравнения в формулу $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$ и получим общее решение: $y = e^{2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$.

4) Если характеристическое можно привести к виду: $[(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2]^k = 0$, то общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos(\beta x) + (C_{k+1} + C_{k+2}\mathrm{x} + \cdots + C_{2k}\mathrm{x}^{\mathrm{k}-1})\sin(\beta x)]$$

Время выполнения: 90 минут.

1. Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

1) $3x^2 dx + 3y^2 dy = 0$ 2) $\frac{dx}{x^2+1} + e^{5y} dy = 0$ 3) $sin(3x)dx - \frac{ydy}{5+y^2} = 0$ 4) $\cos y\, dy + 2xdx = 0$ 5) $x^2 dx = y\, dy$.

2. Решите задачу Коши для уравнений:

1) $2x\,dx = y^2 dy$ при $y(1) = 0$ 2) $\frac{dx}{\cos^2 x} = e^y$при $y(0) = 1$.

3. Найдите общее решение дифференциальных уравнений: 1) $xy^/ = \frac{1-2x}{y}$ 2) $(x + xy^2)dx - (y + x^2 y)dy = 0$ 3) $\sqrt{4 - x^2} \cdot y^/ + xy^2 + x = 0$ 4) $y^/ = -2y$.

4. Решите задачу Коши для уравнений: 1) $y^/ = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ при $y(0) = 1$ 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y sin^2 x}$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 3) $\cos x \cdot \cos y\, dy = \sin x \cdot \sin y\, dx$при $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

5. Найдите общее решение дифференциальных уравнений: 1) $y^{//} = \sqrt{x}$

2) $y^{///} = e^{2x}$ 3) $y^V = \frac{1}{x^5}$

6. Решите задачу Коши для уравнения $y^{///} = 24x$ при $y(0) = 1$, $y^/(0) = 0$, $y^{//}(0) = 0$.

7. Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

1) $y^{//} + 2y^/ - 15 = 0$ 2) $y^{//} + 4y^/ = 0$ 3) $y^{///} + 7y^{//} + 12y^/ = 0$

4) $y^{//} - 8y^/ + 16y = 0$ 5) $y^{//} + 10y^/ + 25y = 0$

6) $y^{IV} + 7y^{///} + 12y^{//} = 0$ 7) $y^{//} - 6y^/ + 34y = 0$ 8) $y^{//} + 16y = 0$ 9) $y^{IV} + 25y^{//} = 0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №20

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Дифференциальные уравнения».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Дифференциальные уравнения».

Проверочная работа № 6 по теме: «Дифференциальные уравнения».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 5 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 4 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 3 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 3 заданий.

В-1

1. Решить задачу Коши, если: $\cos x - y^{/} = 0, y(0) = 1.$

2. Найти общее решение уравнений: а)$y^{/} = e^{x}$ б) $y^{/} = \frac{3y^2}{2}$.

3. Решить уравнение с разделенными переменными: $2xdx + 2ydy = 0.$

4. Решить уравнения с разделяющимися переменными: а) $\frac{dy}{dx} = e^{y}$

б) $3x(1 + y^2)dx - 3y(1 + x^2)dy = 0$ в) $x(y - y^2)\frac{dy}{dx} = 0.$

5. Решить дифференциальные уравнения высших порядков:

а)$y^{//} = x + \sin x$ б) $y^{//} + y^{/} - 2y = 0$ в) $y^{//} + 6y^{/} + 13y = 0.$

В-2

1. Решить задачу Коши, если: $\sin x + y^{/} = 0, y(1) = 1.$

2. Найти общее решение уравнений: а)$y^{/} = 2^{x}$ б) $y^{/} = \frac{4y^3}{3}$.

3. Решить уравнение с разделенными переменными: $y^{\frac{2}{3}}dy = sinxdx$

4. Решить уравнения с разделяющимися переменными: а) $x\frac{dy}{dx} = y$

б) $3x(4 + y^2)dx + 2y(9 + x^2)dy = 0$ в) $y^{/} = y(x^2 + e^{x}).$

5. Решить дифференциальные уравнения высших порядков:

а)$y^{//} = 3x - \cos x$ б) $y^{//} + y^{/} - 2y = 0$ в) $y^{//} + 2y^{/} + 5y = 0.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №21

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Экстремумы функций нескольких переменных.

Цель: Научиться находить частные производные функций трех переменных, дифференциалы функций нескольких переменных, экстремумы функций нескольких переменных, применять дифференциал в приближенных вычислениях.

Пусть функция двух переменных $z = z(x, y)$ – непрерывна и дифференцируема.

Частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ по xназывается производная от этой функции по xпри условии, что y– константа.

Частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ по y называется производная от этой функции по y при условии, что x– константа.

Полный дифференциал функции $z = z(x, y)$, находится по формуле:

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$

Частные производные второго порядка находят дифференцированием производных первого порядка:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$

При нахождении частных производных, правила и таблица производных элементарных функций справедливы и применимы для любой переменной, по которой ведется дифференцирование.

Пример: Выразите площадь треугольника как функцию длин его сторон x, y, и z.

Для вычисления площади треугольника с помощью длин его сторон воспользуемся формулой Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c - стороны треугольника, а p - полупериметр треугольника ($p = \frac{a+b+c}{2}$). Заменим a, b, c в формуле $p = \frac{a+b+c}{2}$ на x, y, z, получим: $p = \frac{x+y+z}{2}$. Подставим полученные данные в формулу Герона и упростим: $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} =$

$$= \sqrt{\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{x+y+z}{2} - x\right)\left(\frac{x+y+z}{2} - y\right)\left(\frac{x+y+z}{2} - z\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{x+y+z}{2}\left(\frac{x+y+z-2x}{2}\right)\left(\frac{x+y+z-2y}{2}\right)\left(\frac{x+y+z-2z}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)} =$$

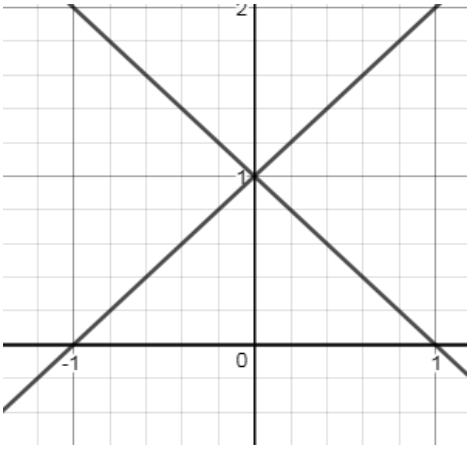
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z)}.$$

Пример: Область D на плоскости представляет собой треугольник, стороны которого находится на прямых, заданных уравнениями: $y = x + 1, x + y = 1, y = 0$. Опишите область D с помощью неравенств.

Для определения границ области D построим графики заданных прямых. Для построения графиков прямых достаточно взять любых два значения x.

x	$y = x + 1$
0	$y = 0 + 1 = 1$
-1	$y = -1 + 1 = 0$

x	$x + y = 1$ или $y = 1 - x$
0	$y = 1 - 0 = 1$
1	$y = 1 - 1 = 0$



$y = 0$ при любых x.

Построим графики по данным точкам в одной системе координат.С помощью графика опишем область D: $0 \le y \le 1,\ \ y - 1 \le x \le 1 - y$.

Пример: Найдите область определения функций и опишите их с помощью неравенств: а) $z = \ln(x^2 - 2y + 16)$ б) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Напомним, что на область определения функции могут накладываться следующие ограничения:

1) подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю;

2) знаменатель не равен нулю;

3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля.

а) $z = \ln(x^2 - 2y + 16)$

В данном примере (ограничение 3) выражение, стоящее под знаком логарифма больше нуля: $x^2 - 2y + 16 > 0$, т.е. $x^2 > 2y - 16,\ \ x^2 > 2(y - 8)$.

б) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

В данном примере (ограничение 1) подкоренное выражение корня четной степени больше, либо равно нулю: $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, т.е.

$$-x^2 - y^2 - z^2 \geq -9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

Пример: Найдите частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = (4x^3y - y^3)^2$ б) $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ (y– константа) и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (x– константа), с помощью формулы: $(x^\alpha)^/ = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. основанием степенной функции является не просто x, а $4x^3y - y^3$), поэтому мы будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(4x^3y - y^3)^{2-1} \cdot (4x^3y - y^3)^/ = 2(4x^3y - y^3) \cdot (4y \cdot 3x^{3-1} - 0) =$$

$$= 2(4x^3y - y^3)(12yx^2) = 24yx^2(4x^3y - y^3).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(4x^3y - y^3)^{2-1} \cdot (4x^3y - y^3)^/ = 2(4x^3y - y^3) \cdot (4x^3 \cdot 1 - 3y^{3-1}) =$$

$$= 2(4x^3y - y^3)(4x^3 - 3y^2).$$

б) $z = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ (y– константа) и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (x– константа), с помощью формул: $(x^\alpha)^/ = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $(\operatorname{arctg} x)^/ = \frac{1}{1+x^2}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. основанием степенной функции является не просто x, а$\frac{y}{x}$), поэтому мы будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^/ = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (x^{-1})^/ = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot y \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} =$$

$$= -\frac{x^2y}{x^2+y^2}\cdot x^{-2} = -\frac{x^2y}{(x^2+y^2)x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{/} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot(y)^{/} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Если функция $u = f(x,y,z)$ дифференцируема, то при малом значении величины $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$приращение функции

$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$ приближенно равно дифференциалу:

$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)dz$, где $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$, что дает приближенное равенство $f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \approx \approx f(x,y,z) + du$, которое можно использовать для приближенного вычисления значения функции. $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ могут быть, как положительными, так и отрицательными.

Второй дифференциал функции $z = f(x,y)$ может быть найден по формуле:

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2$$

Пример: Вычислить приближенно $\sqrt{(5{,}08)^2 + (12{,}01)^2}$.

Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Число $\sqrt{(5{,}08)^2 + (12{,}01)^2}$ является значением этой функции в точке $(5{,}08;\ 12{,}01)$. Эти значения аргументов можно рассматривать как $x + \Delta x$, где $x = 5, \Delta x = 0{,}08$ и $y + \Delta y$, где $y = 12, \Delta y = 0{,}01$. Тогда $\sqrt{(5{,}08)^2 + (12{,}01)^2} \approx \sqrt{5^2 + 12^2} + dz \approx \sqrt{25+144} + dz \approx \sqrt{169} + dz \approx$

$\approx 13 + dz$, где $dz = \frac{\partial z}{\partial x}(5{,}12)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(5{,}12)\Delta y$.

Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ (y– константа) и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (x– константа), с помощью формул: $(x^\alpha)^{/} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ из таблицы «Производных основных элементарных функций». Данная функция является сложной (т.к. под знаком корня находится не просто x, а $x^2 + y^2$), поэтому мы

будем брать производную не только внешней функции, но и внутренней, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x^2+y^2)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x^{2-1}+0) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x^2+y^2)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (0+2y^{2-1}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Найдем

$\frac{\partial z}{\partial x}(5{,}12) = \frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{5}{\sqrt{25+144}} = \frac{5}{\sqrt{169}} = \frac{5}{13}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(5{,}12) = \frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{12}{13}$

Подставим данные в формулу и получим:

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(5{,}12)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(5{,}12)\Delta y = \frac{5}{13} \cdot 0{,}08 + \frac{12}{13} \cdot 0{,}01 = \frac{0{,}4}{13} + \frac{0{,}12}{13} = \frac{0{,}52}{13} = =$ 0,04,отсюда $\sqrt{(5{,}08)^2+(12{,}01)^2} \approx 13 + dz \approx 13 + 0{,}04 \approx 13{,}04$.

Пример: Найдите второй дифференциал функции $z = 2x^4 + 5x^3y^2 - 3y^5$.

Для начала найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 4 \cdot x^{4-1} + 5y^2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 0 = 8x^3 + 15x^2y^2$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x^3 \cdot 2 \cdot y^{2-1} - 3 \cdot 5 \cdot y^{5-1} = 10x^3y - 15y^4$.

Затем найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 15y^2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 24x^2 + 30y^2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8 \cdot 0 + 15x^2 \cdot 2 \cdot y^{2-1} = 30x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10x^3 \cdot 1 - 15 \cdot 4 \cdot y^{4-1} = 10x^3 - 60y^3$$

Подставим вторые производные в формулу:

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2$$

$$d^2z = (24x^2 + 30y^2x\,)dx^2 + 60x^2ydxdy + (10x^3 - 60y^3)dy^2.$$

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум.

Функция $z = f(x,y)$ имеет максимум в точке $M(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) >> f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от неё. Функция $z = f(x,y)$ имеет минимум в точке $M(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) << f(x,y)$ для всех точек (x,y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от неё. Максимум и минимум функции называются экстремумами функции.

Исследование функции двух переменных на экстремум проводят по следующей схеме.

1. Находят частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Решают систему уравнений: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ и таким образом находят критические точки функции.

3. Находят частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Вычисляют значения этих частных производных второго порядка в каждой из найденных в п.2 критических точках $M(x_0, y_0)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M$$

5. Делаем вывод о наличии экстремумов:

а) если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке M имеется максимум;

б) если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке M имеется минимум;

в) если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет;

г) если $AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым и требует дополнительного исследования.

Пример: Исследовать на экстремум функцию: $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1) Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^{3-1} + 3 \cdot 1 \cdot y^2 - 15 \cdot 1 - 0 = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3 \cdot 2 \cdot xy - 0 - 12 \cdot 1 = 6xy - 12$$

2) тогда система для нахождения стационарных точек имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения x и подставим в первое:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = \dfrac{2}{y} \end{cases}$$

$$\frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0$$

$$\frac{4 + y^2 \cdot y^2 - 5y^2}{y^2} = 0$$

$$\frac{4 + y^4 - 5y^2}{y^2} = 0$$

$y^2 \neq 0$, отсюда $y \neq 0$, тогда:

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0$$

$$y^2 = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$a = 1, \qquad b = -5, \qquad c = 4.$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$y^2 = 4 \text{ или} y^2 = 1$$

$$y = \pm 2 \text{ или} y = \pm 1$$

$$x = \frac{2}{y} = \pm\frac{2}{2} = \pm 1 \text{ или} x = \frac{2}{y} = \pm\frac{2}{1} = \pm 2$$

Получим четыре стационарные точки: $M_1(1,2), M_2(2,1), M_3(-1,-2), M_4(-2,-1)$.

3) Найдем производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 - 0 = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x \cdot 1 - 0 = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 + 3 \cdot 2 \cdot y^{2-1} - 0 = 6y$$

4) Вычислим значения этих частных производных второго порядка в каждой из найденных критических точек $M_1(1,2), M_2(2,1), M_3(-1,-2), M_4(-2,-1)$, получим:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M, B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M, C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M$$

Для точки $M_1(1,2)$ A, B, C будут равны:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot 1 = 6$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M = 6y = 6 \cdot 2 = 12$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot 1 = 6$$

Для точки $M_2(2,1)$ A, B, C будут равны:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot 2 = 12$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M = 6y = 6 \cdot 1 = 6$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot 2 = 12$$

Для точки $M_3(-1,-2)$ A, B, C будут равны:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot (-1) = -6$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M = 6y = 6 \cdot (-2) = -12$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot (-1) = -6$$

Для точки $M_4(-2,-1)$ A, B, C будут равны:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot (-2) = -12$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_M = 6y = 6 \cdot (-1) = -6$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = 6x = 6 \cdot (-2) = -12$$

5) Делаем вывод о наличии экстремумов:

Для точки $M_1(1,2)$ составим дискриминант:

$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 12^2 = 36 - 144 = -108 < 0$, следовательно, экстремума в точке $M_1(1,2)$ нет.

Для точки $M_2(2,1)$ составим дискриминант:

$AC - B^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ и $A > 0$, следовательно, в точке $M_2(2,1)$ имеется минимум.

Подставим координаты точки в функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ и найдем ее минимальное значение:

$$z_{min} = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$$

Для точки $M_3(-1,-2)$ составим дискриминант:

$AC - B^2 = (-6) \cdot (-6) - (-12)^2 = 36 - 144 = -108 < 0$, следовательно, экстремума в точке $M_3(-1,-2)$ нет.

Для точки $M_4(-2,-1)$ составим дискриминант:

$AC - B^2 = (-12)\cdot(-12) - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ и $A < 0$, следовательно, в точке $M_4(-2,-1)$ имеется максимум.

Подставим координаты точки в функцию $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ и найдем ее максимальное значение:

$z_{max} = (-2)^3 + 3\cdot(-2)\cdot(-1)^2 - 15\cdot(-2) - 12\cdot(-1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$

Время выполнения: 90 минут.

1. Выразите объем кругового цилиндра как функцию его высоты x и радиуса основания y.

2. Область V в пространстве представляет собой круговой цилиндр радиуса 3, ось которого находится на оси OZ. Опишите область V с помощью неравенств.

3. Найдите область определения функций и опишите их с помощью неравенств: 1) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ 2) $u = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}$ 3) $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

4. Найдите частные производные первого порядка следующих функций: 1) $z = y^x$ 2) $z = sin^2(2x + 3y)$ 3) $z = e^{-(3x^2+5y^2)}$ 4) $z = ln(x^2 + y^2)$ 5) $z = x^4y^2 + xy^3$ 6) $u = ln(2x + 3y + 5z)$ 7) $u = \frac{1}{3x^2+4y^2-2z^2}$ 8) $u = e^{y(x^2+y^2+z^2)}$.

5. Найдите частные производные второго порядка ($\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)$ и убедитесь в том, что они совпадают) от функций:

1) $z = x^5 - xy^3 + 6x^2y^2 + y^5$ 2) $z = y^x$.

6. Докажите, что функция $z = ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ на всей плоскости XOY за исключением точки $(0;0)$, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

7. Найдите полный дифференциал функции: 1) $z = x^3y - 5xy^2$ 2) $z = arctg(xy)$ 3) $z = cos(2x^2y^2 + 3xy^3)$ 4) $u = z^{xy}$ 5) $u = e^{xyz}$ 6) $u = sin(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)$.

8. Вычислите приближенно следующие выражения:

1) $\sqrt{(5{,}07)^2 + (6{,}05)^2 + (30{,}03)^2}$ 2) $\sqrt[3]{(4{,}08)^2 + (6{,}98)^2 - (0{,}94)^2}$.

9. Найдите точки экстремума функций, заданных следующими уравнениями: 1) $z = 2x^3 + 2y^3 - 3xy$ 2) $z = x^3 - 6x^2 + 3xy^2 + 6xy + 5$ 3) $z = 3xy - x^3 - y^3$ 4) $z = 4xy - 6x^2 - 7y^2 + 12$ 5) $z = 6xy + 3x^2 + 10y^2 + 4$ 6) $z = 10xy - 7x^2 - 10y^2 - 34x + 50y$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №22

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Задача о наибольшем и наименьшем значениях.

Цель: Научиться составлять с помощью частных производных уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, решать задачи о наибольшем и наименьшем значениях.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и $P(x_0, y_0, z_0)$ - точка на этой поверхности, то касательная плоскость к поверхности в этой точке имеет уравнение:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 > 0$, где

$A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $B = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$, $C = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

Нормаль к поверхности в этой точке определяется уравнением:

$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$.

Пример: Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3 = 0$ в точке $M_0(1; 2; 3)$.

Для начала найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6y \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - y^2 \cdot 1 - 0 + 0 = 6y - 4x - y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x \cdot 1 - 0 - x \cdot 2 \cdot y^{2-1} - 0 + 0 = 6x - 2xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 - 0 - 0 - 2 \cdot z^{2-1} + 0 = -2z$$

Затем подставим в частные производные первого порядка координаты точки M_0 и получим значения A, B и C:

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}(1;2;3) = 6 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2^2 = 12 - 4 - 4 = 4$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial y}(1;2;3) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$$

$$C = \frac{\partial F}{\partial z}(1;2;3) = -2 \cdot 3 = -6$$

Подставим значения A, B, C и координаты точки M_0 в формулу уравнения касательной плоскости к поверхности $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, получим:

$$4(x - 1) + 2(y - 2) - 6(z - 3) = 0$$

Раскроем скобки и упростим данное выражение:

$$4x - 4 + 2y - 4 - 6z + 18 = 0$$

$$4x + 2y - 6z + 10 = 0$$

$$2x + y - 3z + 5 = 0$$

$2x + y - 3z + 5 = 0$ – общее уравнение искомой касательной плоскости.

Подставим значения A, B, C и координаты точки M_0 в формулу уравнения нормали к поверхности $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$, получим: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-6}$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных.

Функция $z = f(x, y)$ на ограниченном куске непрерывной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями: $x = h(t),\ y = g(t),\ t_A \le t \le t_B$

1) подставим $x = h(t), y = g(t)$ в функцию $z = f(x, y)$ и упростим ее.

2) Найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial t}$ и решим уравнение $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$.

3) Найдем решения, принадлежащие отрезку $\mathrm{t_A} \le \mathrm{t} \le \mathrm{t_B}$

4) Вычислим значения функции при найденных параметрах $t, \mathrm{t_A}, \mathrm{t_B}$ и координаты точек в них.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значения функций: $z = x^2 + y^2$ на дуге эллипса, заданной уравнениями $x = 2cost$, $y = 3sint$, $-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$.

1) подставим $x = h(t), y = g(t)$ в функцию $z = f(x, y)$:

$$z = (2cost)^2 + (3sint)^2 = 4cos^2t + 9sin^2t$$

Для упрощения данной функции воспользуемся формулами половинного угла (понижения степени) $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$, $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}$:

$$z = 4 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} + 9 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} = 2(1 + \cos 2t) + 4{,}5(1 - \cos 2t) =$$

$$= 2 + 2\cos 2t + 4{,}5 - 4{,}5\cos 2t = 6{,}5 - 2{,}5\cos 2t.$$

2) Найдем частную производную $\frac{\partial z}{\partial t}$:

$\frac{\partial z}{\partial t} = (6{,}5 - 2{,}5\cos 2t)' = 0 - 2{,}5 \cdot 2 \cdot sin\,2t = -5\,sin\,2t$ и решим уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$-5\,sin\,2t = 0$$

$$sin\,2t = 0$$

Для решения простейшего тригонометрического уравнения воспользуемся таблицей, приведенной ниже. Обратим внимание на столбец «Простые решения» и найдем там уравнение $sin\,x = 0$, $x = \pi n$, где $n \in Z$. Подставим данные в наше уравнение, получим: $2t = \pi n$, отсюда $t = \frac{\pi n}{2}$.

Уравнение	Формулы	Простые решения
cos x = a, т.е. arccos a = x Условия: (| a | ≤ 1; 0 ≤ x ≤ π)	arccos (-a) = π – arccos a a>0 x = ± arccos a + 2πn, a<0 x = ±(π – arccos a) + 2πn, где n ∈ Z	cos x = 0, x = π/2 + πn cos x = 1, x = 2πn cos x = –1, x = π + 2πn где n ∈ Z
sin x = a, т.е. arcsin a = x Условия:(| a | ≤ 1; –π/2≤ x ≤ π/2)	arcsin (-a) = -arcsin a a>0 x = $(-1)^n$arcsin a + πn a<0 x = $(-1)^{n+1}$arcsin a + πn где n ∈ Z	sin x = 0, то x = πn sin x = 1, то x = π/2 + 2πn sin x = –1, то x = –π/2 + 2πn где n ∈ Z
tg x = a, т.е. arctg a = x Условие: (–π/2 < x <π/2)	arctg (-a) = -arctg a a>0 x = arctg a + πn a<0 x = -arctg a + πn где n ∈ Z	
ctg x = a, т.е. arcctg a = x Условие: (0 < x <π)	arcctg (-a) = π – arcctg a a>0 x = arcctg a + πn a<0 x = π – arcctg a+ πn где n ∈ Z	

3) Найдем решения, принадлежащие отрезку $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

при $n = 0$ $t = \frac{\pi \cdot 0}{2} = 0 \in -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$, т.е. является корнем уравнения на данном отрезке.

при $n = 1$ $t = \frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2} \notin -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$, т.е. не является корнем уравнения на данном отрезке.

при $n = -1$ $t = \frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2} \notin -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$, т.е. не является корнем уравнения на данном отрезке.

На заданном отрезке находится только один корень $t = 0$. Пользуясь таблицей значений углов тригонометрических функций вычислим значения функции $z = 4cos^2t + 9sin^2t$ в точках $t = 0, t = -\frac{\pi}{6}, t = \frac{\pi}{3}$.

Таблица значений углов тригонометрических функций

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\boldsymbol{\alpha}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

$$z(0) = 4cos^2 0 + 9sin^2 0 = 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 0^2 = 4$$

$$z\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 9sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4cos^2\frac{\pi}{6} + 9sin^2\frac{\pi}{6} =$$

$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 == 4 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = 3 + 2{,}25 = 5{,}25$$

$$z\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4cos^2\frac{\pi}{3} + 9sin^2\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{3}{4} = 1 + 6{,}75 =$$

$$= 7{,}75$$

Таким образом, наибольшее значение функции $z = x^2 + y^2$ на дуге эллипса, заданной уравнениями $x = 2cost$, $y = 3sint$, $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ равно $z_{\text{наиб}} = 7{,}25$, а наименьшее - $z_{\text{наим}} = 4$.

Время выполнения: 90 минут.

1. Напишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной следующими уравнениями: 1) $z = 6x^2 - 10y^2$ в точке $P(3; 2; 14)$

2) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 - 49 = 0$ в точке $P(0; 0; 0)$.

2. Написать уравнения нормали к поверхности, заданной следующими уравнениями: 1) $z = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$ в точке $P(-3; 4; -7)$

2) $2x^3 + 3y^3 - z^3 - 3xyz + 31 = 0$ в точке $P(1; -2; 3)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на дуге кривой, заданной уравнениями: 1) $z = 3x^2 + 4y^2 x = 2cost$, $y = 1 + 2sint$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

2) $z = \sqrt{x + y} x = cost$, $y = sint$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №23

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Проверочная работа № 7 по теме: «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Время на выполнение: 90 мин.

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 5 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 4 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 3 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 3 заданий.

В-1

1) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ (под буквой д) функций:

а) $z = x^6y^7 - xy^3 + y^2$ б) $z = (15x^2y - 2y^3)^7$ в) $z = e^{2x^3-6y^2}$

г) $z = \arcsin(y^2x)$ д) $u = ln(2xy^5z - 7y^3x^2z^2 - xy)$.

2) Найти полный дифференциал функции: $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и вычислить приближенно $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}1^2 + 3{,}99^2}$.

3) Написать уравнение касательной и нормали к поверхности:

$2y^3 + 3x^3 - z^3 - 2xyz + 16 = 0$ в точке $O(-1{,}0{,}1)$.

4) Найти экстремумы функции: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

5) Найти наибольшее и наименьшее значение функции: $z = x^2 + y^2$, $x = \cos t, y = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{6}$.

В-2

1) Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial y}$ (под буквой д) функций:

а) $z = x^5y^3 + 2xy^2 - y^4$ б) $z = (5x^3y + y^2)^6$ в) $z = e^{x^3+3y^2}$

г) $z = \arccos(y^3x^2)$ д) $u = ln(xy^2 + 4y^5x^3z^2 + xyz)$.

2) Найти полный дифференциал функции: $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ и вычислить приближенно $\sqrt{3{,}02^2 + 1{,}1^2 - 2{,}89^2}$.

3) Написать уравнение касательной и нормали к поверхности:

$y^4 + 5x^2 + 2z^3 + xyz - 8 = 0$ в точке $O(1, -1{,}0)$.

4) Найти экстремумы функции: $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 6y^2$.

5) Найти наибольшее и наименьшее значение функции: $z = x^2 + y^2$, $x = 2\cos t, y = \sin t$, $-\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №24

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Действия с комплексными числами, решение квадратных уравнений.

Цель: Научиться выполнять арифметические действия над комплексными числами, решать квадратные уравнения с комплексными корнями.

Комплексное число — это выражение вида $a + bi$, где a , b — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, символ, квадрат которого равен –1, то есть $i^2 = -1$. Число a называется действительной частью, а число b — мнимой частью комплексного числа $z = a + bi$. Если $b = 0$, то вместо$a + 0i$ пишут просто a. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами:

1) Сложение и вычитание происходят по правилу:

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$

2) Умножение — по правилу $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

(здесь появляется минус в формуле, т.к. $i^2 = -1$).

3) Число$\bar{z} = a - bi$называетсякомплексно-сопряженнымк$z = a + bi$.

Равенство$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Пример:Выполнить арифметические действия над комплексными числами: $z_1 + 2z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

Для того, чтобы выполнить арифметические действия над комплексными числами не обязательно пользоваться формулами, приведенными выше, достаточно просто знать элементарные правила раскрытия скобок:

$$z_1 + 2z_2 = 1 + i + 2(3 - 2i) = 1 + i + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2i = 1 + i + 6 - 4i = 7 - 3i$$

$$z_1 - z_2 = 1 + i - (3 - 2i) = 1 + i - 3 + 2i = -2 + 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (3 - 2i) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2i + 3 \cdot i - 2i \cdot i = 3 - 2i + 3i - 2i^2 =$$

$= 3 + i - 2 \cdot (-1) = 3 + i + 2 = 5 + i$ (напомним, что здесь мы воспользовались тем, что $i^2 = -1$).

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{3-2i}=\frac{(1+i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 2i+3\cdot i+2i\cdot i}{3^2-(2i)^2}=\frac{3+2i+3i+2i^2}{9-4i^2}$$

$$=\frac{3+5i+2(-1)}{9-4\cdot(-1)}=\frac{3+5i-2}{9+4}=$$

$=\frac{1+5i}{13}=\frac{1}{13}+\frac{5}{13}i$ (Для комплексного числа $z_2=3-2i$ комплексно - сопряженным будет являться $\overline{z_2}=3+2i$. Также мы воспользовались тем, что $i^2=-1$ и формулой сокращенного умножения в знаменателе $(a-b)\cdot(a+b)=$ $=a^2-b^2$).

Время выполнения: 90 минут.

1. В следующих задачах определите: $z_1+z_2;\ z_1-3z_2;\ z_1\cdot z_2;\ \frac{z_1}{z_2}$:

1) $z_1=2-5i;\ z_2=-4+3i$ 2) $z_1=1+4i;\ z_2=2-3i$ 3) $z_1=3-2i; z_2=3+2i$4) $z_1=-1-5i;\ z_2=-1-5i$5) $z_1=1+3i;\ z_2=2-6i$.

2. Решите следующие квадратные уравнения, используя равенство $i=\sqrt{-1}$: 1) $z^2+4z+5=0$2) $z^2-6z+25=0$ 3) $z^2+2z+10=0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №25

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

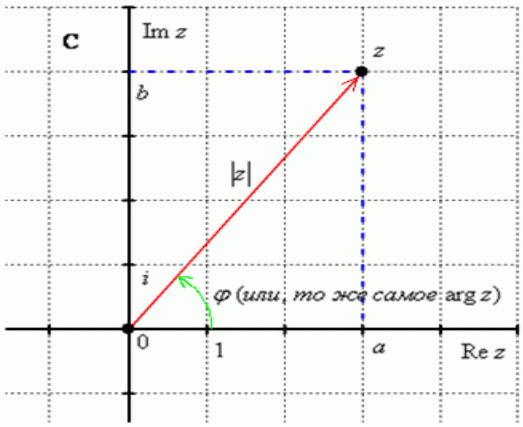
Цель: Научиться записывать комплексные числа в тригонометрической форме, умножать, делить и возводить в степень комплексные числа в тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Любое комплексное число (кроме нуля) $z=a+bi$ можно записать в тригонометрической форме:

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа.

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты, считаем, что $a > 0$, $b > 0$ (см. рисунок справа).



Модулем комплексного числаz называется расстояние от началакоординат до соответствующей точки комплексной плоскости и обозначается$|z|$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргументом комплексного числа z называетсяугол φ междуположительной полуосьюдействительной оси $Re\ z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке и обозначается φ или $\arg z$. Аргумент не определён для единственного числа:$z = 0$.

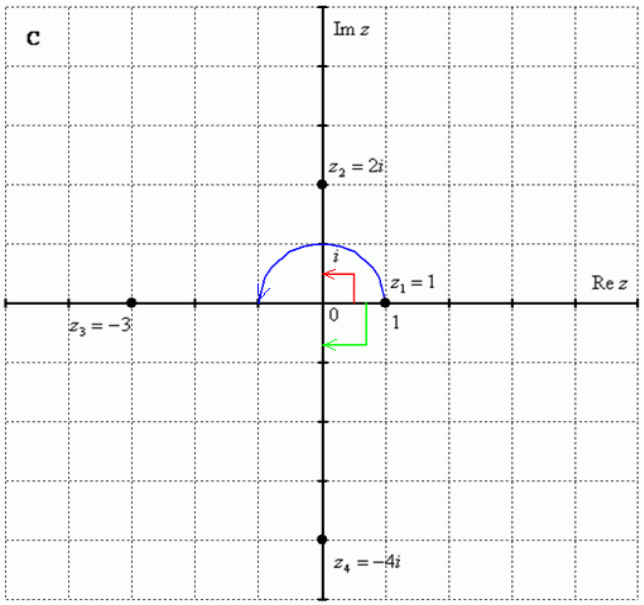
Рассмотрим простейшие примеры, когда комплексные числа располагаются на координатных осях.

Пример: Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

$$z_1 = 1, z_2 = 2i, z_3 = -3, z_4 = -4i.$$

$z_1 = 1$. Здесь действительная часть комплексного числа z_1 - $a = 1$, а мнимая часть - $b = 0$. Найдем $|z_1|$ по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

$$z_1 = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 0$$



Чтобы найти угол φ_1 изобразим координаты комплексного числа z_1 на плоскости (см. рисунок справа). Отсюда, $\varphi_1 = 0$, т.е. угол совпадает с осью $Re\ z$.

Подставим полученные данные в формулу $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и получим тригонометрическую форму комплексные числа z_1:

$z_1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0) = \cos 0 + i\sin 0$. Если бы мы подставили значения тригонометрических функций $\cos 0 = 1$ и $\sin 0 = 0$, то получили бы изначальный вид числа $z_1 = 1$.

В результате, комплексное число z_1 в тригонометрической форме имеет вид: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0$. Аналогичным образом представим остальные комплексные числа. Углы в тригонометрической форме записываются не в градусах, а в радианах (таблица тригонометрических функций и углов в радианах приведена ниже).

Таблица значений углов тригонометрических функций

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

$z_2 = 2i$.

$a = 0, b = 2, \Rightarrow z_2 = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$. Угол φ_2 на рисунке обозначен красной стрелкой, отсюда $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, т.е. $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

$z_3 = -3.$

$a = -3, b = 0, \Rightarrow z_3 = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$. Угол φ_3 на рисунке обозначен синей стрелкой, отсюда $\varphi_3 = \pi$, т.е. $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

$z_4 = -4i.$

$a = 0, b = -4, \Rightarrow z_4 = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$. Угол φ_4 на рисунке обозначен зеленой стрелкой. Если угол больше 180^0, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$(минус 90^0), т.е. $z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Чтобы определить угол, который не совпадает с осями $Re\, z$ и $Im\, z$, рассмотрим три варианта формул, зависящих от четверти, в которой располагается угол:

1) Если $a > 0$ (1-я и 4-я координатные четверти), то аргумент нужно находить по формуле: $\varphi = \arg z = arctg\frac{b}{a}$.

2) Если $a < 0$, $b > 0$ (2-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле $\varphi = \arg z = \pi + arctg\frac{b}{a}$.

3) Если $a < 0$, $b < 0$ (3-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле$\varphi = \arg z = -\pi + arctg\frac{b}{a}$.

Пример: Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

$$z_1 = -2 + 4i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Представим в тригонометрической форме число$z_1 = -2 + 4i$. Найдем его модуль и аргумент.

$a = -2, b = 4, \Rightarrow |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Поскольку$a < 0$, $b > 0$ (случай 2), тоаргумент находим по формуле:$\varphi_1 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{4}{-2} = \pi + arctg(-2) = \pi - arctg2.$

Подставим полученные данные в формулу $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, и получим: $z_1 = 2\sqrt{5}(\cos(\pi - arctg\ 2) + i\sin(\pi - arctg\ 2))$

Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$a = 1, b = -\sqrt{3}, \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то аргумент находим по формуле:

$\varphi_2 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Чтобы найти значение $arctg\sqrt{3}$, мы воспользовались таблицей значений тригонометрических функций приведенной выше.

Подставим полученные данные в формулу $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, и получим: $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

1) Умножение.

Чтобы найти произведение чисел $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$нужно перемножить их модули и сложить аргументы:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

2)Деление.

Чтобы найти частное чисел $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$нужно разделить их модули и вычесть аргументы:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Пример: Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$. Используя тригонометрическую форму записи, найдите произведение и частное комплексных чисел.

$$z_1 = 1 - i$$

$$a = 1, b = -1, \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то аргумент находим по формуле:

$\varphi_1 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-1}{1} = arctg(-1) = -arctg1 = -\frac{\pi}{4}$.

$$z_2 = 1 + i$$

$$a = 1, b = 1, \Rightarrow |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то аргумент находим по формуле:

$\varphi_2 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{1}{1} = arctg1 = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Подставим полученные данные в формулу $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + +\varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ и получим произведение чисел в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2(\cos 0 + i\sin 0)$.

Подставим полученные данные в формулу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + +i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ и получим произведение чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

3) Возведение в степень. Если комплексное число представлено в тригонометрической форме, $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ то при его возведении в натуральную степень справедлива формула:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

! Углы принимают значения от 0 до 2π.

Пример:

Дано комплексное число $z = 1 + i$. Найти z^{n12}.

Из предыдущего примера $|z| = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Подставим полученные данные в формулу $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ и получим:

$$z^{12} = \left|\sqrt{2}\right|^{12} \cdot \left(\cos\left(12 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(12 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1}{2} \cdot 12} \cdot (\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$$

В таблице значений углов тригонометрических функций значения α принимают значения от 0 до 2π, поэтому будем вычитать период периодических функций синус и косинус, пока значение угла не попадет в пределы от 0 до 2π.

$\cos 3\pi = \cos(3\pi - 2\pi) = \cos\pi$, $\sin 3\pi = \sin(3\pi - 2\pi) = \sin\pi$.Вернемся к решению нашего примера и подставим получившиеся результаты: $2^{\frac{1}{2} \cdot 12} \cdot (\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^6 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1 + i \cdot 0) = -64$.

Таблица значений углов тригонометрических функций

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-
$\boldsymbol{\alpha}$	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Время выполнения: 90 минут.

1. Представьте следующие комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $z = 5 + 5i$2) $z = -7 - 7i$ 3) $z = 9 - 9i$ 4) $z = 1 + i\sqrt{3}$5) $z = -1 - i\sqrt{3}$6) $z = -1$7) $z = i$8) $z = -i$ 9) $z = 3$ 10) $z = -4i$11) $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$12) $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$.

2. Используя тригонометрическую форму записи, найдите произведение и частное следующих комплексных чисел: 1) $z_1 = -2 - 2i;\ z_2 = 1 - i$2) $z_1 = -1 + i\sqrt{3};\ z_2 = \sqrt{3} - i$3) $z_1 = -\sqrt{3} + i;\ z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

3. Запишите следующие числа в алгебраической форме: 1) $(1 - i)^{10}$ 2) $\left(-\sqrt{3} - i\right)^7$3) $(i)^{25}$4) $(2 + 2i)^7$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №26

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Комплексные числа».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Комплексные числа».

Проверочная работа № 8 по теме: «Комплексные числа».

Время на выполнение: 90 мин.

«отлично» - верно выполнено 6 примеров.

«хорошо» - верно выполнено 5 примеров.

«удовлетворительно» - верно выполнено 3-4 примера.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 3 примеров.

В-1

1. Для комплексных чисел $z_1 = 2 - 6i$; $z_2 = -1 + i$, вычислить: а) $3z_1 + z_2$ б) $z_1 \cdot z_2$.

2. Представить в тригонометрической форме числа: а) $z = \sqrt{3} + i$ б) $z = -1 - i$.

3. Представить в тригонометрической форме числа: $z_1 = -1 - i$; $z_2 = 1 + i$, найти: а) $\frac{z_1}{z_2}$ б) z_1^2.

В-2

1. Для комплексных чисел $z_1 = 2 - 6i$; $z_2 = -1 + i$, вычислить: а) $6z_1 - 2z_2$ б) $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Представить в тригонометрической форме числа: а) $z = -\sqrt{3} + i$ б) $z = 3 + \sqrt{3}i$.

3. Представить в тригонометрической форме числа: $z_1 = -1 - i$; $z_2 = 1 + i$, найти: а) $z_1 \cdot z_2$ б) z_2^{16}.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №27

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Нахождение суммы ряда.

Цель: Научиться находить члены ряда по формуле общегочлена и наоборот, сумму ряда или устанавливать его расходимость.

В общем виде положительный числовой ряд можно записать: $\sum$– знак суммы; a_n – общий член ряда. Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n = 1$, затем $n = 2$, потом $n = 3$, и так далее – до бесконечности.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля$\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки$\sum_{n=2}^{\infty}$, либос любого натурального числа.

Будем считать, что все слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это неотрицательные числа. То есть, речь пойдет о положительных числовых рядах.

Пример:Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2n + 1$.

Сначалаподставим $n = 1$, тогда:$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Затем$n = 2$, тогда:$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Потом$n = 3$, тогда:$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Запишем сумму первых трех членов ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} 2n + 1 = 3 + 5 + 7 + \ldots$

Пример:Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots$В заданиях данного вида важно определить закономерность, чтобы задать формулой общий член ряда. В числителе стоят все натуральные числа по порядку $1,2,3,4, \ldots, n$, т.е. n. В знаменателе3, 9,27, 81 – это степени числа 3, т.е. 3^n. Получим, $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Сумма ряда. Понятие сходимости числовых положительных рядов.

Строгое определение сходимости/расходимости и суммы ряда в теории даётся через так называемые частичные суммы ряда. Частичные – значит неполные. Распишем частичные суммы числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\ldots$$

И особую роль играет частичная сумма «эн» членов ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$$

1)Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = \infty$ либо суммы вообщене существует. Например, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$не существует.

$\sum_{n=1}^{\infty} 2n + 1 = 3 + 5 + 7 + \ldots = \infty$ряд расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$ряд расходится.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторомуконечному числу S : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots = S$. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$– этот ряд сходится и его сумма равна нулю.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots$ – этот ряд представляет бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. n -ый член: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Сумма членов убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$– знаменатель геометрической прогрессии.

$b_1 = 1, q = \frac{\frac{1}{4^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$. Таким образом:

$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$сходится.

Свойства рядов:

1)Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \bar{S}$, то будут сходиться и ряды, составленные из сумм или разностей соответствующих членов:

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S + \bar{S}, \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = S - \bar{S}$.

2) Константу kможно вынести за знак ряда:$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример: Найти сумму ряда$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{6^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n} + \ldots$$

Дважды используем формулу для нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а $q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ – знаменатель геометрической прогрессии.

Для ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$. Таким образом: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$

Для ряда $\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n} + \ldots$, $b_1 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{\frac{2^2}{3^2}}{\frac{2}{3}} = \frac{2^2 \cdot 3}{3^2 \cdot 2} = \frac{2}{3}$. Таким образом: $S = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2.$

Вернемся к решению нашего примера и подставим получившиеся результаты:

$$S = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \ldots + \frac{2^n}{3^n} + \ldots = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Общий алгоритм нахождения суммы ряда:

1) необходимо составить n- ую частичную сумму ряда S_n.

2) найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Пример: Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Сначала нужно разложить общий член ряда в сумму дробей. Используем метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

домножаем на наименьший общий знаменатель$(2n+1)(2n+3)$ дроби,

$\frac{A(2n+1)(2n+3)}{2n+1} + \frac{B(2n+1)(2n+3)}{2n+3} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}$ сокращаем,

$A(2n+3) + B(2n+1) = 1$раскрываем скобки,

$2An + 3A + 2Bn + B = 1$выписываем по отдельности системы уравнений содержащие n и состоящие только из свободных членов (если бы в уравнении имелись бы n^2, n^3, n^4 и т.д., то мы бы их тоже выписали отдельно),

$\begin{cases} 2An + 2Bn = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases}$ разделим первое уравнение на общий множитель $2n$, а из второго выразим B,

$\begin{cases} A + B = 0 \\ B = 1 - 3A \end{cases}$ подставим B в первое уравнение,

$\begin{cases} A + 1 - 3A = 0 \\ B = 1 - 3A \end{cases}$ решим отдельно первое уравнение относительно A,

$$1 - 2A = 0$$

$$-2A = -1$$

$A = \frac{1}{2}$, подставим получившийся ответ во второе уравнение и найдем B,

$$B = 1 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Теперь подставив значения A и B в выражение $\frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}$, мы сможем записать общий член ряда:

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Теперь составим частичную сумму ряда$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 1 + 3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 \cdot 2 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 2 + 3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 \cdot 3 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 3 + 3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)$$

...

$$a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)+1} - \frac{1}{2(n-1)+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-2+1} - \frac{1}{2n-2+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Почти все слагаемые частичной суммы сокращаются:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots \frac{1}{2n-1} - -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Осталось вычислить элементарный предел и узнать сумму ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot\infty+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Время выполнения: 90 минут.

1. Записать первые три члена ряда: 1)$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)\cdot 5^n}$.

2. Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{7}} + \frac{4}{\sqrt[5]{14}} + \frac{8}{\sqrt[5]{21}} + \ldots$$

3. Найти сумму ряда или установить его расходимость: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n - 3^{n+1}}{10^n}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$ 7) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{n^3-n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2+4n+3}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{36}{n^2+5n+4}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №28

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Сходимость числовых положительных рядов.

Цель: Научиться определять сходимость или расходимость числовых положительных рядов с помощью необходимого признака сходимости, признака сравнения и предельного признака сравнения числовых положительных рядов.

Одной из ключевых задач теории числовых рядов являетсяисследование ряда на сходимость. При этом возможны два случая:

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности, либо суммы вообще не существует.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому конечному числу S.

Необходимый признак сходимости: Если дан ряд$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$и$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится (в частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$).

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} 2n+1$. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и убедимся, что ряд расходится.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2n+1 = 2\cdot\infty+1 = \infty \Longrightarrow$ ряд расходится.

! Если общий член ряда стремится к нулю, то это не значит, что ряд сходится– он может, как сходиться, так и расходиться! И в таких случаях для решения примеров нужно использовать другие признаки.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1) = \infty \neq 0$$

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7+\frac{3}{n}^{\to 0}} = \frac{1}{7} \neq$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$называетсягармоническим рядом. Легко заметить, что$\lim\limits_{n\to\infty} a_n == \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, но в теории математического анализа доказано, чтогармонический ряд расходится.

Понятие обобщенного гармонического ряда:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

1)Данный рядрасходитсяпри$\alpha \leq 1$. Например, расходятся ряды$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ $(\alpha = \frac{1}{3})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(\alpha = \frac{1}{2})$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\alpha = 1)$.

2) Данный рядсходитсяпри$\alpha > 1$. Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}(\alpha = \frac{3}{2})$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\alpha = 2)$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(\alpha = 3)$.

Признаки сравнения для положительных числовых рядов.

Признак сравнения:Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, и выполнено неравенство$a_n \leq b_n$(для $n = 1,2,3,\ldots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$тоже сходится.

Пример: Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$

Сравним исследуемый ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Используем признак сравнения. Для рассматриваемых рядов выполнено неравенство$\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд сходитсявместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходится, и выполнено неравенство$a_n \geq b_n$ (для $n = 1,2,3, \ldots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$тоже расходится.

Пример: Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Сравним исследуемый ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$. Используем признак сравнения.

Если $n = 2$, то $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{2}$ ($\ln 2 \approx 0{,}6931$).

Если $n = 3$, то $\frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{3}$ ($\ln 3 \approx 1{,}0986$).

Если $n = 4$, то $\frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{4}$ ($\ln 4 \approx 1{,}3862$).

Т.е. для всех членов ряда выполнено неравенство $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд сходится вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$.

! Обратите внимание, что во всех случаях в знаменателях у нас находятся «плюсы». Наличие хотя бы одного минуса может серьёзно осложнить использование рассматриваемогопризнака сравнения. Например, если ряд$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$таким же образом сравнить со сходящимся рядом$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то условие $a_n \leq b_n$ не будет выполняться! Поэтому для доказательства сходимости ряда$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$гораздо проще использоватьпредельный признак сравнения.

Предельный признак сравнения числовых положительных рядов: Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел

отношения общих членов этих рядов равен конечному, отличному от нуля числуA: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.Найдем предел отношения общих членов ряда данных рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{\infty}=1$$

Для рассматриваемых рядов выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$, значит, по предельному признаку сравнения исследуемый ряд сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Пример:Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}$.

Чтобы определить ряд, с которым будем сравнивать данный нам ряд, выполним 3 пункта мысленно или на черновике:

1) Определяем старшую степень числителя. В нашем примере она равна 2.

2) Определяем старшую степень знаменателя. В нашем примере она равна 1.

3) Из степени знаменателя вычитаем степень числителя. Т.е. $2-1=1$. Значит ряд с которым будем сравнивать имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Используем предельный признак сравнения: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}}{\frac{1}{n}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{\sqrt{2n^4-n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{\sqrt{2n^4-n+5}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4-n+5}}{n^2}}==\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4-n+5}}{\sqrt{n^4}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\sqrt{\frac{2n^4-n+5}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}{\sqrt{\frac{2n^4}{n^4}-\frac{n}{n^4}+\frac{5}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{2-\frac{1}{\infty}+\frac{5}{\infty}}}==\frac{1-0}{\sqrt{2-0+0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Для рассматриваемых рядов выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$, значит, по предельному признаку сравнения исследуемый ряд расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Время выполнения: 90 минут.

1. Докажите расходимость следующих рядов с помощью необходимого признака сходимости:1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+4}$2) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{\frac{1}{n}}$4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$6) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3n+1}{n^2+4}$.

2. Докажите с помощью признака сравнения положительных числовых рядов, что данные ряды сходятся: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+5}}$2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}$3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2+3n+7}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^4+n)}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{20}}$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

3. Докажите с помощью предельного признака сравнения положительных числовых рядов, что данные ряды сходятся: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n^3+1)}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{1}{n^2}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{3n^2+2}{3n^2}\right)$5) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{(n^2+5)}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n^2-1)}{2n^2}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №29

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Признаки сходимости Даламбера и Коши.

Цель: Научиться определять сходимость или расходимость числовых положительных рядов с помощью признаков сходимости Даламбера и Коши.

Сначала начнем с повторения. Вспомним случаи, когда нужно применять предельный признак сравнения.

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

1) В знаменателе находится многочлен.

2) Многочлены находятся и в числителе, и в знаменателе.

3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

Основные предпосылки для применения признака Даламбера следующие:

1) В общий член ряда входит какое-нибудь число в степени, например,2^n,3^n,5^nи так далее.

2) В общий член ряда входит факториал, например,$n!$, $8!$, $(n+1)!$, $(n-3)!$и так далее.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например,$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)$.

Признак Даламбера: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то:

а) При $D < 1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$.

б) При $D > 1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.

в) При $D = 1$признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак.

! Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать предельный признак сравнения.

Пример:Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{4^n}$. Используем признак Даламбера, т.к. в общий член ряда входит число в степени:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1} \cdot (n^2+n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot (n^2+2n+1+n+1-1)}{4^1 \cdot 4^n \cdot (n^2+n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n+1)}{4 \cdot (n^2+n-1)} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+0+0}{1+0-0} = \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{4} < 1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$. Используем признак Даламбера, т.к. в общий член ряда входит факториал:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}}{\frac{(n+1)!,}{(n+5)\cdot 7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1+1)!\cdot(n+5)\cdot 7^n}{(n+1)!\cdot(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot(n+5)\cdot 7^n}{(n+1)!\cdot(n+6)\cdot 7\cdot 7^n}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\cdot(n+5)}{(n+1)!\cdot(n+6)}$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+5)}{(n+1)!\cdot(n+6)}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+2n+10}{n+6}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+7n+10}{n+6}=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{7n}{n^2}+\frac{10}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{6}{n^2}}$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{7}{n}+\frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1+\frac{7}{\infty}+\frac{10}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1+0+0}{0+0}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{0}=\frac{1}{7}\cdot\infty=\infty>1$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}$. Используем признак Даламбера, т.к. в общем члене ряда есть «цепочка множителей». Сначала для понимания происходящего распишем ряд подробно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}$$

$$=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 3}+\frac{2^3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}+\ldots$$

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2(n+1)-1)}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+2-1)}$$

$$=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Вот здесь часто допускают ошибку, формально по алгоритму записывая, что $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2(n+1)-1)}$, пропуская при этом предыдущий множитель факториала $2n-1!$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)}}{\frac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 2\cdot\frac{1}{2\cdot\infty+1} = 2\cdot\frac{1}{\infty}$$

$$= 2\cdot0 = 0 < 1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Радикальный признак Коши.

Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда общий член ряда полностью находится в степени, зависящей от n. Либо когда корень $\sqrt[n]{a_n}$«хорошо» извлекается из общего члена ряда.

Радикальный признак Коши: Рассмотрим положительный числовой ряд$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = D$, то:

а) При $D < 1$ ряд сходится. В частности, ряд сходится при $D = 0$.

б) При $D > 1$ ряд расходится. В частности, ряд расходится при $D = \infty$.

в) При $D = 1$признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$.

Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от n, а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{(n+1)^2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2}{n}+\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{n+2+\frac{1}{n}} = \left(\frac{5\cdot\infty-1}{6\cdot\infty+7}\right)^{\infty+2+\frac{1}{\infty}}$$

$$= \left(\frac{\infty-1}{\infty+7}\right)^{\infty+2+0} =$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{6n}{n}+\frac{7}{n}}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{n}}{6+\frac{7}{n}}\right)^{n+2}=\left(\frac{5-\frac{1}{\infty}}{6+\frac{7}{\infty}}\right)^{\infty+2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\infty}=0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Интегральный признак Коши.Рассмотрим положительный числовой ряд$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Данный ряд сходится или расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом. Если получено конечное число, значит, исследуемый ряд сходитсявместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример: Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$.

Используем интегральный признак Коши. Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $[1;\infty)$. Найдем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}dn=\int_1^{\infty}(5n-1)^{-\frac{2}{3}}dx=\left(\frac{(5n-1)^{-\frac{2}{3}+1}}{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}\cdot\frac{1}{5}\right)\Big|_1^{\infty}=\left(\frac{(5n-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}\cdot 5}\right)\Big|_1^{\infty}=$$

$$=\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{5n-1}}{5}\right)\Big|_1^{\infty}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5\cdot\infty-1}}{5}-\frac{3\cdot\sqrt[3]{5\cdot 1-1}}{5}=\frac{3\cdot\infty}{5}-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}=\infty-\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}$$

$$=\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд расходитсявместе с соответствующим несобственным интегралом.

Примечание: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$ также можно исследовать с помощью предельного признака сравнения. Для этого сравнить исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Время на выполнение: 90 мин.

1. С помощью признака Даламбера и радикального признака Коши исследовать ряды на сходимость: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\cdot\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{(2n)!}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ 10)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}$ 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln(n+1))^n}$ 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$ 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$ 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$.

2. С помощью интегрального признака Коши исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №30

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Признак Лейбница.

Цель: Научиться определять сходимость или расходимость числовых знакопеременных рядов с помощью признака сходимости Лейбница.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, члены которых $a_n \neq 0$, могут иметь произвольные знаки, называются знакопеременными.

Например, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n = -1+2-3+4-5+6-7+\ldots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\ldots$

Для исследования знакопеременных рядов на сходимость используется признак Лейбница:

1) Ряд является знакочередующимся.

2) Члены ряда убывают по модулю: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$. Члены a_n монотонно убывают, начиная с некоторого n_0 и выполняются неравенства $a_n \geq a_{n+1}$

Если выполнены обаусловия, то ряд сходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{4}}-\frac{4}{\sqrt{5}}+\ldots$ Данный ряд является знакочередующимся.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n+1}}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}} = \frac{1}{\sqrt{0+0}} = \frac{1}{0} = \infty \neq 0$. Члены ряда не убывают по модулю.

Вывод: Ряд расходится.

Время выполнения: 90 минут

1. Исследовать знакочередующиеся ряды на сходимость: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ 2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{2n-1}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot n^5$5)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot n$6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №31

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Сходимость знакочередующихся рядов.

Цель: Научиться определять абсолютную и условную сходимость знакопеременных числовых рядов.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, в противном случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$сходится условно.

Пример: Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$Ряд является знакочередующимся.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$. Члены ряда убывают по модулю, т.е. ряд сходится.

3) Составим ряд из модулей – убираем множитель, который обеспечивает знакочередование:$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$– расходится (гармонический ряд). Значит, наш ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$сходится условно.

Пример: Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!}$.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^n\cdot n^4}{n!} = 7 - \frac{784}{2} + \frac{27783}{6} - \ldots$Ряд является знакочередующимся.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!} = ?!$

Дело в том, что не существует стандартных обыденных приемов для решения подобных пределов. Куда стремится такой предел? К нулю, к бесконечности? Здесь важно, чтона бесконечности растёт быстрее – числитель или знаменатель.

Обратимся к теории математического анализа:

– Факториал растёт быстрее, чем любая показательная последовательность, иными словами: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{n!}=0$или$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{10^n}=\infty$.

– Факториал растёт быстрее, чем любая степенная последовательность или многочлен, иными словами: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{n!}=0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{10}}=\infty$.

– Факториал растёт быстрее, чем произведение любого количества показательных и степенных последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}=0$.

– Любая показательная последовательность растёт быстрее, чем любая степенная последовательность, например: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^{10}}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5\cdot(n^2+3)\cdot n^7}{2^n}=0$.

– Степенно-показательная последовательность («эн» в степени «эн») растёт быстрее факториала. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$.

Таким образом

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n\cdot n^4}{n!}=0$, так как $n!$более высокого порядка роста, чем $7^n\cdot n^4$.

Члены ряда убывают по модулю, начиная с некоторого номера n, при этом, каждый следующий член ряда по модулю меньше, чем предыдущий, таким образом, убывание монотонно.

Вывод: ряд сходится.

Вот здесь как раз тот любопытный случай, когда члены ряда сначала растут по модулю, из-за чего у нас сложилось ошибочное первоначальное мнение о пределе. Но, начиная с некоторого номера «эн», факториал обгоняет числитель, и

«хвост» ряда становится монотонно убывающим, что и позволяет применить признак Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную/условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n \cdot n^4}{n!}$

Применимпризнак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^{n+1}\cdot(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{7^n \cdot n^4}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}\cdot(n+1)^4\cdot n!}{(n+1)!\cdot 7^n\cdot n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 7^n\cdot(n+1)^4\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 7^n\cdot n^4}$$

$$=$$

$$= 7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)\cdot n^4} = 7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} = 7\cdot\frac{1}{\infty+1} = 7\cdot\frac{1}{\infty} = 7\cdot 0 = 0 < 1$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. Исследуемый ряд сходится абсолютно.

Время на выполнение: 90 мин.

1. Докажите абсолютную сходимость рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{4}{3}}}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n!}$ 3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+5}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №32

по учебной дисциплине «Элементы высшей математики»

Тема: Проверочная работа по теме: «Ряды».

Цель: Закрепление полученных знаний по разделу «Ряды».

Проверочная работа № 9 по теме: «Ряды».

Время на выполнение: 90 мин.

«отлично» - верно выполнено 6-7 примеров.

«хорошо» - верно выполнено 4-5 примеров.

«удовлетворительно» - верно выполнено 3 примера.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 3 примеров.

В-1

1. Найти сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5\cdot 4^n+5^n}{8^n}\right)$.

2. Исследовать ряды на сходимость и указать признак сходимости: а) $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\cdots+\frac{n}{3n+1}+..$ б) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}+\cdots$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{n}\frac{1}{n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n\cdot(2n+3)}$.

В-2

1. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

2. Исследовать ряды на сходимость и указать признак сходимости: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ в) $\frac{1}{11}+\frac{2}{21}+\frac{3}{31}+\cdots+\frac{n}{10n+1}+\cdots$ г) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n-2}}+\cdots$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)}$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15n^2+6n+4}{3n+2+12n^2}\right)^n$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №33

по учебной дисциплине«Элементы высшей математики»

Тема: Подготовка к экзаменационной контрольной работе.

Цель: Повторить и закрепить пройденный материал по учебной дисциплине, подготовиться к написанию экзаменационной контрольной работы.

Время выполнения: 90 минут.

Вариант 0.

1. Вычислите сумму и произведение матриц А и В:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 6\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 8 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Найдите обратную матрицу: $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

3. Вычислить систему методом Крамера: $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\ x_1-2x_2+3x_3=-3\\ 7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$

4. Найдите координаты вектора $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$, если $A(-3,0,6)$, $B(5,-7,3)$, $C(-2,4,2)$, $D(3,-3,11)$.

5. Определить вид кривой второго порядка и длины полуосей a и b:

$\frac{x^2}{100} + 4y^2 = 1.$

6. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$.

7. Вычислить производную функции: $y = x^3 ln \frac{1}{x}$.

8. Вычислите интеграл: $\int \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} dx.$

9. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{6x^2}{x+1}$ в точке $x_0 = 2.$

10. Решить дифференциальное уравнение: $y^{IV} - 2y^{///} + y^{//} = 0.$

Критерии оценивания:

«отлично» - верно выполнено 10 заданий.

«хорошо» - верно выполнено 8-9 задания.

«удовлетворительно» - верно выполнено 5-7 задания.

«неудовлетворительно» - верно выполнено менее 5 заданий.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. Учебник для студ. сред.проф. учреждений – М.: Издательский центр «Академия», 2010

Дополнительная:

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. “Математика для техникумов на базе средней школы”, “ Учебное пособие, 1989 г.